



Non-linéarité Kerr dans les Fibres Optiques Microstructurées

F. Drouart

► To cite this version:

F. Drouart. Non-linéarité Kerr dans les Fibres Optiques Microstructurées. Physique [physics]. Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2008. Français. NNT: . tel-00438491

HAL Id: tel-00438491

<https://theses.hal.science/tel-00438491>

Submitted on 3 Dec 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Fabien Drouart

Institut Fresnel CNRS - Marseille

**Non-Linéarité Kerr
dans les Fibres Optiques
Microstructurées**

Thèse de doctorat en Électromagnétisme

Fabien Drouart

Institut Fresnel CNRS - Marseille

Non-Linéarité Kerr dans les Fibres Optiques Microstructurées

**Thèse de doctorat en Électromagnétisme
- Lundi 10 novembre 2008**

Membres du jury

Rapporteurs :

Albert Ferrando Professeur à l'Université de Valence, Espagne

Eric Lantz Professeur à l'Université de Franche-Comté

Examineurs :

André Nicolet Professeur à l'Université Paul Cézanne

Gilles Renversez Maître de Conférences à l'Université Paul Cézanne

Christophe Geuzaine Professeur à l'Université de Liège, Belgique

Jérôme Léon Professeur à l'Université de Montpellier II

Celui qui déplace la montagne, c'est celui qui commence par enlever les petites pierres.

— Confucius

那些最终移走大山的人，
都是从搬走小石块开始做起的。

— 孔夫子

Remerciements à

André Nicolet et **Gilles Renversez** pour m'avoir encadré *quotidiennement* durant ces trois années de thèses passées au sein de l'Institut Fresnel. Ce savoir entouré et soutenu chaque jour dans ce travail exploratoire fut une chance et un privilège. Je leur suis tout particulièrement reconnaissant pour le temps et la confiance qu'ils m'ont accordés tout au long de cette thèse. Le cheminement vers ce manuscrit fut souvent difficile et semé d'embûches (que j'ai parfois créées !) mais en équipe tout est toujours plus facile.

Christophe Geuzaine pour son support *infaillible* dans l'utilisation du logiciel éléments finis Gmsh/GetDP. Tout au long de cette thèse, Christophe a modifié et amélioré, en particulier pour nous, le logiciel. Nous lui demandions une modification un jour et le lendemain tout était au point, prêt à être utilisé. Sans son aide ce travail n'aurait jamais pu voir le jour, tout simplement.

Aux membres du jury **Albert Ferrando**, **Eric Lantz** et **Jérôme Léon** qui ont accepté de faire partie du jury de thèse, qui ont consacré une partie de leur temps à l'étude de ce mémoire et pour le soin qu'ils ont pris dans cet exercice.

Philippe Boyer. Il m'a en particulier expliqué sa méthode numérique (FFF-MS) permettant d'étudier le cas linéaire dans les fibres optiques et fourni des résultats utiles à notre étude notamment dans la validation de notre approche.

Xiaoyun Zhang. Il s'agit de mon dernier remerciement mais ce n'est pas le moindre. Merci à Xiaoyun pour les moments *formidables* que nous avons passés dans les quatre derniers mois de ma thèse (et pour la traduction de la citation de Confucius). Malheureusement, il nous arrive de rencontrer les meilleures personnes un peu trop tard...

Table des matières

Table des matières	i
Préambule	1
Résumé - Abstract	3
Introduction générale	4
1 Présentation théorique du modèle étudié	15
1.1 Les équations de Maxwell et les équations constitutives	15
1.2 Présence de non-linéarités	17
1.3 Effet Kerr optique	18
1.4 L'équation de Helmholtz non-linéaire	20
2 Méthode originale pour résoudre une équation non-linéaire scalaire	23
Introduction	23
2.1 L'équation de Helmholtz présentant un effet Kerr optique dans l'ap- proximation scalaire	24
2.1.1 Champ électrique scalaire	24
2.1.2 Obtention de l'équation non-linéaire scalaire	24
2.2 La Méthode des Éléments Finis appliquée au problème étudié	26
2.2.1 Le principe de la Méthode des Éléments Finis	26
2.2.2 Formulation faible de l'équation non-linéaire	28
2.2.3 Application de la méthode de Galerkin	31
2.2.4 Principe et choix du maillage	33
2.3 Présentation du processus itératif de résolution du problème non- linéaire	35
2.3.1 Utilisation de la méthode itérative de Picard	35
2.3.2 Originalité de la méthode : la renormalisation du champ . . .	38
2.4 Le choix du logiciel de résolution : Gmsh/GetDP	42
2.4.1 Le logiciel de maillage Gmsh	42
2.4.2 Le solveur associé à Gmsh : GetDP	44
2.4.3 La méthode de résolution de l'équation aux valeurs propres	45
2.4.4 Les difficultés rencontrées	47

Conclusion	48
3 Vers une unique solution non-linéaire scalaire dans les fibres optiques	49
Introduction	49
3.1 Présentation des fibres optiques étudiées	50
3.1.1 La fibre conventionnelle à saut d'indice	50
3.1.2 La fibre microstructurée à cœur plein	52
3.2 Validation de la méthode numérique : étude du cas linéaire	55
3.2.1 Comparaison des méthodes FFF-MS et Éléments Finis	55
3.2.2 Utilisation des PMLs pour l'évaluation des pertes	57
3.2.3 Comparaison des méthodes Multipolaire et Éléments Finis	58
3.3 Premiers résultats dans le cas non-linéaire	60
3.3.1 Étude de la convergence	60
3.3.2 Utilisation du maillage adaptatif	62
3.4 Vers l'unique solution non-linéaire auto-cohérente	65
3.4.1 Cas linéaire comme point de départ	66
3.4.2 Généralisation du processus itératif	69
Conclusion	81
4 Au-delà du Soliton de Townes	83
Introduction	83
4.1 Signification physique de la solution non-linéaire auto-cohérente	84
4.1.1 L'algorithme à puissance fixée	84
4.1.2 Validation de l'algorithme à puissance fixée par la MEF	86
4.1.3 Le soliton spatial : une solution de haute puissance	89
4.1.4 Étude de la convergence des algorithmes auto-cohérent et à puissance fixée	92
4.2 Influence des paramètres opto-géométriques	94
4.2.1 Propriétés du soliton spatial suivant la longueur d'onde	94
4.2.2 Influence de la structure de la fibre	96
4.2.3 Influence de la taille finie des FOMs	100
4.2.4 Des puissances importantes...	103
4.3 Soliton de Townes et soliton spatial	105
4.3.1 Le soliton de Townes : la solution du milieu homogène non-linéaire	105
4.3.2 Le soliton spatial n'est pas le soliton de Townes !	108
Conclusion	113
5 Le cas vectoriel : l'étude complète du problème non-linéaire dans les fibres	115
Introduction	115
5.1 Approximation scalaire liée au guidage faible	116
5.2 L'équation non-linéaire vectorielle et formulation faible associée	117
5.2.1 Obtention de l'équation non-linéaire vectorielle	117
5.2.2 Détermination de la formulation faible associée	118

5.2.3	Application de la MEF au cas vectoriel	122
5.3	L'algorithme auto-cohérent dans le cas vectoriel	124
5.4	Validation de la méthode : étude du cas linéaire	128
5.4.1	Comparaison des méthodes FFF-MS et des Éléments Finis	129
5.4.2	Comparaison des méthodes Multipolaire et MEF avec PML	130
5.5	Détermination du soliton spatial vectoriel	133
5.5.1	Solution du problème linéaire comme point de départ	134
5.5.2	Fonction gaussienne comme point de départ	134
5.6	Implications physiques	138
5.6.1	Nécessité de l'étude du modèle vectoriel	138
5.6.2	L'algorithme à puissance fixée vectoriel	142
5.6.3	Influence de la structure des fibres	146
5.6.4	Soliton spatial vectoriel du milieu homogène	149
	Conclusion	152
6	Une étude originale de FOM à défaut creux : le cas donneur - accepteur	155
	Introduction	155
6.1	Présentation de la FOM à défaut creux	155
6.1.1	Géométrie et caractéristiques	155
6.1.2	Modélisation	156
6.2	Les approches théorique et numérique	158
6.2.1	L'approche théorique : le cas linéaire	159
6.2.2	L'approche numérique : le cas non-linéaire	160
6.2.3	Cas "périodique" : un unique soliton spatial	163
6.3	Validation de la méthode : le cas donneur	164
6.3.1	Variation de la taille du défaut	164
6.3.2	Étude de l'effet Kerr négatif	167
6.4	Des résultats contre-intuitifs : le cas accepteur	169
6.4.1	Variation de la taille du défaut	169
6.4.2	Cas accepteur : deux solitons spatiaux!	171
6.4.3	Étude de l'effet Kerr négatif	175
	Conclusion	175
	Conclusion générale	177
A	Systèmes d'unités en optique non-linéaire et analyse dimensionnelle	183
A.1	Les systèmes d'unités utiles pour un problème non-linéaire	183
A.2	Analyse dimensionnelle des grandeurs utilisées	184
B	Présentation et utilisation des PMLs dans le cadre de cette étude	185
B.1	Présentation des PMLs utilisées dans cette étude	185
B.2	Utilisation des PMLs et paramètres importants	187
B.3	Optimisation des PMLs dans le cas des fibres optiques	187
B.3.1	Dans le modèle scalaire	188
B.3.2	Dans le modèle vectoriel	189

C Puissance de Poynting dans le cas scalaire	191
Communications scientifiques	193
Bibliographie	195

Préambule

Au cours de ce manuscrit, quelques abréviations, notations ou conventions vont être utilisées. Voici un résumé des principaux points intéressants qui permettront une bonne lecture.

■ Notations mathématiques :

E	champ électrique vectoriel
E	champ électrique scalaire
E_t	composante transverse du champ électrique
E_z	composante longitudinale du champ électrique
∂_x	opérateur dérivée partielle selon x où $\partial_x = \partial/\partial x$
∂_x^2	opérateur dérivée seconde partielle selon x telle que $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$
∇	opérateur Nabla dont les composantes sont $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$
$\nabla \times E$	opérateur rotationnel de E
$\nabla \cdot E$	opérateur divergence de E
∇E	opérateur gradient de E
Δ	opérateur Laplacien avec $\Delta = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$
$\int_F dS$	intégrale surfacique sur le domaine F : coupe transverse de la fibre optique
$\int_K dS$	intégrale surfacique sur le domaine K : coupe transverse de la région non-linéaire
\Rightarrow	implication logique. $X \Rightarrow Y$ signifie “Si X alors Y ”
\rightarrow	signifie “tend vers”

■ Notations physiques :

λ	longueur d’onde
β	constante de propagation
k_0	vecteur d’onde égal à $2\pi/\lambda$
n_0	partie linéaire de l’indice de réfraction
n_{eff}	indice effectif β/k_0
R_c	rayon du cœur de la fibre à saut d’indice
Λ	“pitch” ou période du réseau des inclusions d’air dans les FOMs
a	rayon des trous d’air dans les FOMs
b	rayon du cœur dans une FOM à cœur creux

■ Abréviations utilisées :





FOM	Fibre Optique Microstructurée
MEF	Méthode des Éléments Finis
MM	Méthode multipolaire
FFF-MS	méthode de la Factorisation rapide de Fourier appliquée à la recherche de modes (Fast Fourier Factorization - Mode Searching)

■ Symboles :

Afin de mettre en évidence certaines idées, j'utilise des symboles associés à chacune d'entre elles

***Remarques******Approximations******Hypothèses******Points clés*** permettant de mettre en avant les idées importantes du manuscrit**■ Couleurs :**

Dans le but de différencier facilement les différentes structures étudiées, j'ai affecté à chacune d'entre elles une couleur dominante dans les différentes figures exposées dans ce manuscrit :

	Fibre à saut d'indice
	FOM à cœur plein
	FOM à cœur creux
	Milieu homogène

Résumé

Nous voulons déterminer les solitons spatiaux dans les fibres optiques présentant un effet non-linéaire de type Kerr optique. Pour cela, nous proposons une nouvelle approche numérique basée sur la Méthode des Éléments Finis qui est particulièrement bien adaptée à l'étude de milieux inhomogènes. Un modèle scalaire du champ électrique dans les fibres optiques est utilisé pour mettre en œuvre et valider notre méthode et comprendre la signification physique des nouvelles solutions dans un cas simple. Le champ est supposé harmonique en temps et suivant la direction d'invariance de la fibre mais inhomogène selon sa section transverse. Plusieurs exemples dans les fibres à saut d'indice et dans les fibres optiques microstructurées (FOMs) à cœur plein de dimension transverse finie sont décrits. Pour chaque géométrie, une étude complète est réalisée pour obtenir et prouver numériquement l'existence d'une unique solution non-linéaire auto-cohérente ou soliton spatial de plus haute énergie atteignable avant l'autofocalisation instable. Le soliton spatial dépend du profil transverse fini de la structure, correspond au soliton de Townes dans le cas du milieu homogène mais est différent de celui-ci dans les fibres optiques étudiées. Notre nouvelle approche de l'étude numérique de l'effet Kerr dans les fibres optiques permet ainsi de généraliser le soliton de Townes. Cependant, le profil de l'indice de réfraction induit par l'effet Kerr optique montre que l'approximation du guidage faible n'est plus respectée et donc que les caractéristiques de la solution non-linéaire sont mal évaluées dans le modèle scalaire. L'implémentation du cas vectoriel sans approximation est donc réalisée. La même étude que dans le cas scalaire est alors menée en considérant toutes les composantes du champ électrique. Enfin, pour étendre le champ d'application de notre méthode numérique, les solutions non-linéaires sont étudiées dans des FOMs avec un défaut creux au centre. Par analogie avec la physique du solide, les configurations donneur/accepteur sont définies et les solutions non-linéaires sont analysées selon la taille du défaut. L'étude des effets Kerr positif et négatif à travers ces configurations nous permet de découvrir de nouveaux comportements non-linéaires dans ces structures.

Mots clés :

Équations de Maxwell, fibre optique microstructurée, effet Kerr optique, Méthode des Éléments Finis, équation aux valeurs propres, modèles scalaire/vectoriel, soliton spatial, soliton de Townes, modes donneur/accepteur.

Introduction générale

LES FIBRES OPTIQUES MICROSTRUCTURÉES (FOMs) sont apparues au milieu des années 1990 [52]. Elles ont démontré un vaste potentiel d'applications et ce dans des domaines très variés allant des télécommunications à la biophotonique en passant par les capteurs ou les sources laser. De ce fait, les FOMs constituent des guides de lumière originaux et performants. En particulier, l'étude de la non-linéarité dans les fibres optiques microstructurées de taille finie n'est réalisée que partiellement via la résolution de l'équation de Schrödinger non-linéaire en y injectant les paramètres "ad-hoc". Dans ce travail, nous souhaitons prendre en compte de manière plus précise ces effets de taille finie. En introduction, nous

- exposerons le contexte général de cette étude
- décrirons les motivations qui nous ont poussées vers le choix de cette approche
- définirons le cadre de l'étude
- exposerons la démarche que nous allons utiliser pour la mener à bien.

◆ Propagation dans les fibres optiques

Une fibre optique est un guide de lumière, généralement cylindrique, présentant un profil d'indice et une structure transverse particulière. Au cours de ma thèse, j'ai étudié successivement la fibre conventionnelle à saut d'indice (section 3.1.1), la fibre optique microstructurée à cœur plein (section 3.1.2) et la fibre microstructurée à cœur creux (section 6.1).

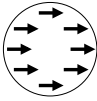

Les fibres optiques conventionnelles guident la lumière en respectant la loi de Snell-Descartes par

- réflexion totale interne pour les fibres à saut d'indice
- réflexion totale interne modifiée (en première approximation) dans les FOMs à cœur plein avec des inclusions de bas indice
- guidage par bande interdite photonique dans les FOMs à défaut creux (voir section 6.2.1).

Dans les fibres optiques conventionnelles à saut d'indice, la propagation lumineuse se fait à travers un ou des modes guidés (constante de propagation réelle) qui deviennent des modes à pertes (constante de propagation complexe) [17] dans les FOMs du fait de leur structure particulière que nous allons présenter.

Dans le cas linéaire, un mode est défini comme une fonction d'onde dont la répartition transverse se conserve tout au long de sa propagation. La forme de ce mode est fonction de la géométrie du guide ainsi que de ses indices optiques. Dans le cas d'une fibre optique monomode, il ne se propage qu'un mode : le *mode fondamental Linéairement Polarisé* noté LP_{01} (pour l'approximation du guidage faible) ou le mode hybride HE_{11} dans le cas général. Pour une fibre multimode, plusieurs modes peuvent se propager. Le nombre de modes est notamment fonction de la taille du cœur de la fibre optique.

Afin de limiter les difficultés et pour comprendre les phénomènes non-linéaires mis en jeu, nous étudierons uniquement le mode fondamental (voir le tableau ci-dessous).

	E_t	$ E_t $
Mode Fondamental : LP_{01} ou HE_{11}		

Nous vérifierons pour chaque simulation numérique que la répartition et la polarisation du champ correspondant au mode obtenu dans le cadre des études linéaires et non-linéaires correspondent bien au mode fondamental présenté dans le tableau précédent.

Remarque préliminaire 1 : Notons que nous ne pouvons parler de mode que dans le cas linéaire. En présence d'un effet non-linéaire il n'y a pas de principe de superposition, propre au mode linéaire. Ainsi, dans le cadre de l'étude non-linéaire nous parlerons de *solution non-linéaire associée au mode fondamental* et non de "mode fondamental non-linéaire".

◆ Pourquoi une étude dans les fibres optiques micro-structurées ?

Les FOMs offrent des propriétés hors du commun du fait de l'interaction des champs guidés avec les inclusions présentes dans la structure (figure 1). En effet, la période ou "pitch" (noté Λ), la taille des inclusions d'air (de rayon a), leur forme et leur disposition (formant les classes de symétries [17]), le contraste d'indice entre la matrice et les inclusions sont autant de degrés de liberté se traduisant dans les propriétés physiques. Ces propriétés trouvent des applications très variées dans de nombreux domaines de l'optique comme les télécommunications, le transport de

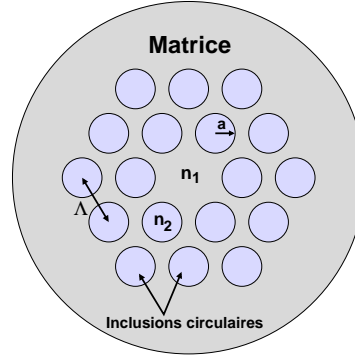


FIGURE 1 – Schéma d'une fibre optique microstructurée à cœur plein. Λ est le pitch ou la période des inclusions, a est leur rayon. n_1 et n_2 représentent respectivement les indices de réfraction de la matrice et des inclusions.

puissance, la médecine ou encore le domaine militaire.

Dans cette étude, nous modéliserons des FOMs

- à cœur plein. La figure 1 montre le schéma d'une fibre à cœur plein constituée de deux rangées d'inclusions circulaires. La propagation du mode se fait dans le défaut constitué par l'omission d'une inclusion circulaire au centre de la fibre.
- à défaut creux. Le mode se propage autour du défaut constitué par la présence d'une inclusion circulaire centrale de taille différente des trous environnants. Nous ne parlons pas ici de FOMs à cœur creux car dans ce cas le mode se propage dans l'inclusion centrale et non autour.

La fibre optique microstructurée peut garantir une propagation monomode quelle que soit la longueur d'onde de travail. La figure 2 montre le diagramme des différents régimes pour les FOMs à cœur plein à grand nombre de couches d'inclusions. Pour caractériser ces régimes, nous représentons l'évolution dans le cas linéaire l'évolution de la longueur d'onde normalisée par le pitch : λ/Λ en fonction de la taille des trous normalisée par le pitch : $2a/\Lambda$. Pour le mode fondamental, à la place d'une longueur d'onde critique séparant les deux états du second mode (ligne pointillée), nous observons une région de transition (en bleu sur la figure 2) qui sépare un régime de type confiné pour les courtes longueurs d'onde et de type étendu pour les grandes longueurs d'onde.

Nous représentons également les différentes régions (traits verticaux) dans lesquelles nous étudierons les configurations linéaire (validation de la méthode numérique) et non-linéaire suivant la longueur d'onde λ , le pitch Λ et la taille des inclusions a .

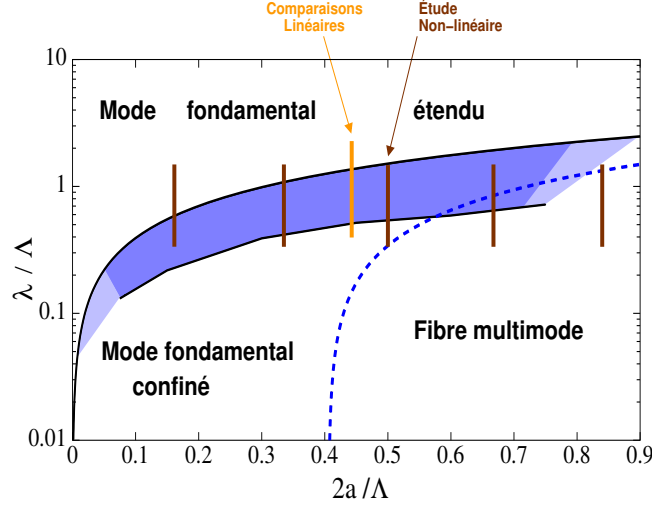


FIGURE 2 – Diagramme des différents régimes pour les FOMs à cœur plein. La région colorée correspond à la région de transition du mode fondamental. La ligne pointillée représente la limite entre le mode fondamental et le second mode. La barre verticale orange montre dans quelle région nous avons mené les études linéaires (validation de la méthode numérique). Les barres verticales marrons montrent dans quelles régions nous avons mené les études non-linéaires.

Les applications les plus connues sont :

- la génération d'un supercontinuum qui est la formation d'un large spectre continu par propagation d'impulsions de haute énergie à travers un matériau non-linéaire (observé en 1970 par Alfano et Shapiro [35, 36]. Ceci permet de produire toutes les longueurs d'onde du visible et au-delà, à partir d'une impulsion spectralement étroite.
- les réseaux de télécommunication longue distance où l'atténuation atteint à l'heure actuelle (depuis 2003) celle des fibres standards [37]. L'un des paramètres limitant est la dispersion chromatique qui peut être ajustée en modifiant le "pitch" ou la taille des inclusions d'air composant une FOM. D'autres FOMs peuvent présenter une dispersion négative dont le couplage avec des FOMs traditionnelles ou à saut d'indice peut être utilisé comme compensateur de dispersion chromatique.
- le transfert de fortes puissances sans distorsion temporelle ou spectrale. Ceci est notamment utilisé dans les domaines médical et militaire. Les nombreux degrés de liberté concernant les paramètres opto-géométriques des FOMs leur permettent également de trouver une place prépondérante dans les amplificateurs. Dans cette perspective, le coefficient de gain de l'amplification peut être augmenté, réduisant ainsi d'environ 40% la longueur de fibre né-

cessaire à l'obtention d'un gain donné. L'utilisation des FOMs permet donc une miniaturisation des systèmes en offrant la possibilité de contrôler la dispersion chromatique tout en assurant un fort confinement du champ guidé, indispensable à l'obtention de gains élevés.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, certaines FOMs permettent d'obtenir un fort confinement des champs guidés engendrant des densités de puissance élevées et pouvant alors entraîner l'apparition d'*effets non-linéaires*.

◆ Effets non-linéaires dans les fibres optiques

L'optique non-linéaire concerne l'étude des phénomènes qui se produisent lorsqu'il survient une modification des propriétés optiques d'un matériau en présence de lumière. Ces phénomènes optiques sont dits non-linéaires dans le sens où ils se produisent quand la réponse d'un matériau à un champ optique appliqué dépend d'une manière non-linéaire de l'intensité du champ optique.

Les effets non-linéaires sont en général une nuisance pour les réseaux de télécommunication car ils altèrent le signal transmis (pour les applications WDM) voire le détruisent en entraînant une autofocalisation instable du faisceau. Cependant, ces effets présentent de nombreuses applications utiles avec en particulier l'implémentation de fonctionnalités tout optique dans les réseaux optiques et l'amplification de signaux [37, 67].

Les fibres optiques ont éventuellement une section droite de cœur de faible surface ce qui entraîne un fort confinement des modes en particulier dans les FOMs. Dans ces conditions, la densité de puissance peut devenir importante et peut provoquer l'apparition d'effets non-linéaires. Plusieurs phénomènes peuvent alors être étudiés [1, 2, 6] selon qu'il s'agisse d'une modulation de l'indice de réfraction (effet Kerr optique) ou de la dispersion inélastique simulée (dispersion Raman et de Brillouin). Dans le cadre de cette étude, c'est l'effet Kerr optique que nous considérerons.

Une immense majorité des travaux relatifs à l'étude des non-linéarités dans les fibres est basée sur l'équation de Schrödinger non-linéaire permettant d'analyser (à travers différents termes) la propagation d'une impulsion (figure 3(a)) le long de l'axe de la fibre optique [1]. Si la dispersion et la non-linéarité sont négligeables, l'atténuation sera le facteur limitant. Si la non-linéarité est négligeable, c'est l'effet de la dispersion chromatique qui est prépondérant. Ceci entraîne un étirement ou "chirp" négatif de la fréquence (figure 3(b)).

Si la dispersion est négligeable, alors il s'agit du régime d'auto-modulation de phase impliquant l'apparition d'un "chirp" positif (figure 3(c)). Enfin, dans le cas où ni la dispersion ni la non-linéarité ne sont négligeables, alors il y a possibilité d'une exacte compensation des deux phénomènes. Dans ce cas, il existe une solution particulière (figure 3(d)) appelée *soliton temporel* [1, 6].

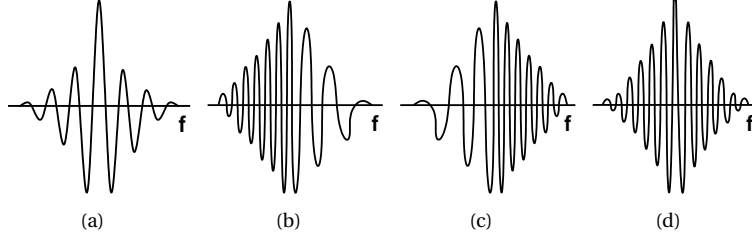


FIGURE 3 – Représentation du profil suivant la largeur fréquentielle du pulse initial (a), de pulse en sortie “chirpé” négativement (b), “chirpé” positivement (c) et du soliton temporel (d).

Ainsi, l’étude de la non-linéarité dans les fibres optiques avec l’équation de Schrödinger se fait en modélisant la fibre comme un fil infiniment fin où une impulsion se propage selon la dimension longitudinale de la fibre.

◆ Quel problème voulons-nous étudier ?

Nous voulons étudier numériquement l’influence de l’effet Kerr optique sur le mode fondamental dans les fibres optiques microstructurées en considérant leur dimension transverse finie afin de prendre en compte le profil particulier de celles-ci. L’effet Kerr optique se traduit par la dépendance de l’indice de réfraction à l’intensité du champ optique. Dans cette perspective, nous mettrons en évidence des *solitons spatiaux* en régime fréquentiel. Ces solitons spatiaux sont à différencier des solitons temporels généralement étudiés dans le cadre de la propagation d’une impulsion selon l’axe longitudinal d’une fibre considérée comme un fil infiniment fin. Les solitons spatiaux sont en outre mono-fréquence dans l’étude que nous menons. Ainsi, nous étudions les solutions non-linéaires dans la dimension transverse de la fibre permettant de prendre en compte le profil particulier des FOMs.

Des méthodes rigoureuses pour la modélisation des propriétés *linéaires* des FOMs ont été développées depuis plusieurs années [54] et ont été successivement utilisées pour étudier les pertes, la dispersion chromatique du mode fondamental [53] et la coupure du second mode [60]. Une étude plus détaillée est également disponible dans le chapitre 7 de la référence [17].

La modélisation des propriétés *non-linéaires* dues à l’effet Kerr optique pour les fibres optiques est quant à elle beaucoup plus compliquée. Même si quelques techniques ont déjà été proposées auparavant [1, 6], aucune n’est complètement satisfaisante. D’une part et comme évoqué précédemment, il y a une immense majorité des travaux basés sur l’équation de Schrödinger non-linéaire. D’autre part, il n’y a que quelques études fondées directement sur les équations de Maxwell (ou leur approximation scalaire) qui prennent en considération le profil transverse des fibres optiques. Les différences entre les deux approches sont notamment étudiées dans les références [34, 41, 22]. En particulier, l’équation de Schrödinger non-linéaire

vectorielle conduit à un système parabolique d'équations au contraire de la méthode basée directement sur les équations de Maxwell qui amène à un système elliptique (équation de type Helmholtz). L'étude réalisée ici appartient au second groupe et est donc plus proche des équations de Maxwell.

◆ Comment allons-nous procéder ?

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'étude de la non-linéarité Kerr dans les fibres optiques microstructurées en considérant leur section transverse finie constitue une nouvelle approche. Nous avons alors choisi d'adopter une *démarche progressive* en validant chaque étape. Elle est basée sur la détermination des solutions de l'équation non-linéaire obtenues directement à partir des équations de Maxwell et dans laquelle nous considérons un effet non-linéaire du troisième ordre : l'effet Kerr optique non saturable. La méthode numérique que nous employons est la Méthode des Éléments Finis (MEF) permettant la modélisation des fibres optiques et des équations à résoudre. En outre, l'approche utilisée va nous permettre d'améliorer les précédentes études menées jusqu'alors.

◆ Une étude nouvelle

Premièrement, nous généralisons l'algorithme présenté dans les références [25, 26] en considérant des FOMs dont la structure transverse est de taille finie (non périodisée). La référence [25] était notre base de travail et notre point de départ. À la différence d'une structure périodique, les propriétés de symétries sont satisfaites plus simplement puisque la fibre est considérée dans son ensemble sans devoir définir une cellule élémentaire. L'implémentation des conditions aux bords est alors facilitée. De plus, nous étudierons non-seulement le cas de l'approximation scalaire mais aussi la configuration vectorielle complète.

Deuxièmement, nous n'utilisons pas la méthode généralement employée pour ce type d'étude à savoir l'*algorithme à puissance fixée* [25, 26]. À chaque étape de ce processus itératif la puissance des solutions intermédiaires est renormalisée par la puissance fixée arbitrairement en entrée de l'algorithme. Au contraire, la nouvelle approche que nous proposons permet de ne pas fixer de paramètre en entrée du processus à l'exception de la longueur d'onde d'étude [30, 23]. Notre nouvel algorithme détermine la puissance *a posteriori* à partir de la solution non-linéaire obtenue en sortie et suivant la minimisation d'un résidu pondéré.

Enfin, au contraire des travaux menés par Snyder et *al.* [63, 62], l'algorithme proposé permet le traitement de milieux inhomogènes. En effet, la Méthode des Éléments Finis est une méthode numérique parfaitement adaptée à la modélisation de milieux inhomogènes (non-linéaires) et de structures complexes (FOMs). Bien que d'autres techniques existantes peuvent traiter la présence d'indices de réfraction inhomogènes dans les fibres [20], la MEF a prouvé qu'elle était un outil très efficace pour la détermination de modes propagatifs dans les fibres optiques microstructurées [30, 47, 46].

♦ Une approche pas-à-pas

Pour étudier la non-linéarité Kerr dans la section transverse des fibres optiques microstructurées, nous allons tout d'abord présenter théoriquement le modèle. Ceci consiste à définir les différentes relations à utiliser : l'équation de propagation de type Helmholtz et l'indice de réfraction modulé par l'effet Kerr optique.

Ensuite, nous allons présenter la méthode numérique imaginée qui se compose de deux parties : la modélisation des fibres et des équations par la MEF et l'algorithme original permettant la résolution du problème non-linéaire. Enfin, nous présenterons rapidement le logiciel utilisé et les raisons qui nous ont amenées à ce choix.

La détermination des solutions non-linéaires se fera de manière progressive au cours de laquelle chaque étape sera validée. Le modèle initial sera le cas scalaire permettant la validation de la méthode numérique et de l'algorithme de résolution. À travers l'approximation scalaire, nous commencerons par une étude numérique plus technique au cours de laquelle nous présenterons les différents procédés utilisés pour mettre au point et améliorer la méthode. La complexité du modèle sera par ailleurs augmentée progressivement en comparant d'abord notre modèle linéaire aux autres méthodes parfaitement validées dans les différentes fibres [20]. Puis, nous passerons au cas non-linéaire scalaire dans la fibre à saut d'indice (géométrie bien connue) avant de passer aux FOMs.

Grâce à cette première partie technique, nous montrerons numériquement qu'il n'existe, pour chaque structure modélisée et à chaque longueur d'onde fixée, qu'une unique solution non-linéaire : la *solution non-linéaire auto-cohérente*¹ ou *soliton spatial*. Nous pourrions alors analyser les implications physiques de ces solutions en étudiant l'algorithme à puissance fixée [25]. L'étude nous permettra de comprendre la signification physique de la solution non-linéaire. Puis, nous analyserons l'influence de la structure transverse de dimension finie des différentes fibres optiques étudiées.

Enfin, nous comparerons cette solution avec le soliton de Townes [27, 21] : solution du milieu homogène (sans structure guidante) non-linéaire. L'étude que nous allons mener va nous permettre de généraliser le soliton de Townes par l'analyse des solitons spatiaux prenant en compte non seulement la structuration des milieux (fibre à saut d'indice ou fibre optique microstructurée) mais aussi la constante de propagation des modes obtenus.

À travers l'étude de la modulation de l'indice de réfraction engendrée par l'effet non-linéaire, nous montrerons que l'approximation scalaire n'est plus valable. La configuration vectorielle non-linéaire complète provenant directement des équations de Maxwell sans approximation sera alors implémentée. Nous verrons que

1. à cet instant la notion de "solution auto-cohérente" peut être assimilée à "solution obtenue à la convergence du processus itératif"

celle-ci est bien plus complexe mais aussi qu'il existe une différence non négligeable entre les modèles scalaire et vectoriel. Nous utiliserons alors une démarche comparable au cas scalaire avec d'abord une étude technique prouvant numériquement l'existence d'une unique solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle puis une étude physique suivant la longueur d'onde et la structure de la fibre optique. Enfin, nous mettrons pour la première fois en évidence numériquement et à l'issue d'une démarche progressive, l'existence d'un soliton de Townes vectoriel.

Enfin, pour élargir le domaine de validité de notre nouvelle approche nous aborderons l'étude originale et plus complexe des FOMs à cœur creux dans le cas scalaire. Nous différencierons les modes donneurs des modes accepteurs en modifiant la taille de l'inclusion centrale constituant le défaut. Nous prouverons alors l'existence de phénomènes nouveaux et contre-intuitifs permettant ainsi de généraliser la nouvelle méthode numérique proposée.

Présentation théorique du modèle étudié

1.1 Les équations de Maxwell et les équations constitutives

Les équations de Maxwell étant largement expliquées et justifiées dans de nombreux ouvrages [4, 63, 15], nous ne nous limiterons ici qu'à leur citation. Le vecteur champ électrique \mathbf{E} , le vecteur déplacement électrique \mathbf{D} , le vecteur champ magnétique \mathbf{H} et le vecteur de densité de flux magnétique \mathbf{B} sont liés :

– par les équations de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.4)$$

où ∇ représente l'opérateur vectoriel *Nabla* dont les composantes sont données par $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Les grandeurs définies ci-dessus dépendent de la variable temporelle t non explicitée ici par souci de clarté.

☞ **Hypothèse 1 :** Nous omettons les termes de sources puisqu'il est rarement intéressant de décrire un problème de génération de lumière au moyen de courants. De plus, nous résoudrons un problème homogène de type Helmholtz conduisant à l'étude de modes propres. Ces modes seront déterminés par la résolution de problèmes aux valeurs propres. Les termes de sources ne

sont donc pas pris en compte dans cette étude.

- par les équations constitutives où le problème linéaire implique leur linéarité :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (1.6)$$

où les constantes ϵ_0 et μ_0 sont appelées respectivement permittivité électrique et perméabilité magnétique du vide. \mathbf{P} et \mathbf{M} représentent respectivement la polarisation électrique induite et la polarisation magnétique induite.

Tant que les champs appliqués \mathbf{E} sont de faibles intensités devant les champs caractéristiques du matériau, toutes les grandeurs sont *linéaires* et notamment la polarisation.

Dans ce cadre, nous pouvons définir la polarisation induite \mathbf{P} qui dépend linéairement du champ électrique \mathbf{E} telle que [2]

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}(t) \quad (1.7)$$

où $\chi^{(1)}$ représente le tenseur susceptibilité linéaire du premier ordre. $\chi^{(1)}$ est la principale contribution de la polarisation \mathbf{P} et agit principalement sur l'indice de réfraction n .

☞ **Hypothèse 2 :** Dans le cadre de notre étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans les fibres optiques, nous considérons que la polarisation représente une quantité variant rapidement en temps [2].

☞ **Hypothèse 3 :** Les matériaux optiques sont considérés non magnétiques ce qui signifie que $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

Dans ces conditions, les équations (1.5) et (1.6) deviennent

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.9)$$

où ϵ_r représente la permittivité relative linéaire du matériau.

☞ **Hypothèse 4 :** Nous savons que la partie imaginaire de ϵ_r est petite devant sa partie réelle ce que nous vérifierons au cours de l'étude des pertes (sections

3.2.3, 4.2.3 et 5.4.2). De ce fait, nous pouvons supposer que la permittivité relative linéaire du matériau est égale au carré de l'indice de réfraction linéaire n_0 du milieu.

Ainsi, ces équations décrivent complètement le champ électromagnétique dans un matériau linéaire et isotrope en l'absence de courants et de charges. Cependant, si l'intensité de ce champ devient importante, des effets non-linéaires peuvent se produire.

1.2 Présence de non-linéarités

Supposons que le champ électrique \mathbf{E} soit d'intensité suffisamment forte pour qu'une non-linéarité apparaisse. En particulier, la polarisation électrique devient non-linéaire :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL} \quad (1.10)$$

dans laquelle \mathbf{P}^{NL} est définie comme [2]

$$\mathbf{P}^{NL}(t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(2)} \mathbf{E}^2(t) + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(t) + \dots \right) \quad (1.11)$$

où $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$ sont les tenseurs des susceptibilités non-linéaires d'ordre 2 et d'ordre 3. Dans les fibres optiques, l'effet non-linéaire d'ordre 3 correspond au premier effet non-linéaire observable car il n'y a que des non-linéarités d'ordre impair. En effet, la fibre est constituée de silice qui est un *matériau centro-symétrique* (matériau amorphe) ce qui signifie qu'il admet un centre d'inversion [1, 67]

$$\chi^{(2)} = -\chi^{(2)} \Rightarrow \chi^{(2)} = 0. \quad (1.12)$$

Cet effet d'ordre 3 est responsable de phénomènes tels que la génération de troisième harmonique, le mélange à quatre ondes et la modulation non-linéaire de l'indice de réfraction [17, 1]. La polarisation totale s'écrit alors

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \left(\chi^{(1)} \mathbf{E}(t) + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(t) \right). \quad (1.13)$$

Cependant, les effets non-linéaires qui impliquent la génération de nouvelles fréquences (par exemple la génération de troisième harmonique et le mélange à quatre ondes) n'apparaissent généralement pas dans les fibres optiques [1]. La majorité des effets non-linéaires dans ces structures sont donc à l'origine de la modulation de l'indice de réfraction par l'intensité du champ électrique se propageant dans la fibre. Ce phénomène est appelé l'*effet Kerr optique* [1, 2, 6, 12, 13].

1.3 Effet Kerr optique

L'effet Kerr optique correspond à la modification, par une onde lumineuse intense, des propriétés optiques d'un milieu non-linéaire provoquant une variation d'indice photo-induite (pour un calcul scalaire des susceptibilités) ou une biréfringence photo-induite (calcul tensoriel des susceptibilités). Ce phénomène se traduit par une modulation de l'indice de réfraction du milieu non-linéaire en fonction de l'intensité de l'onde qui traverse le matériau.

Nous pouvons définir la modulation de l'indice de réfraction par l'effet Kerr optique suivant deux relations. D'une part,

$$n = n_0 + n_2 \langle E^2 \rangle \quad (1.14)$$

où n_0 représente l'indice de réfraction linéaire du milieu, $\langle E^2 \rangle$ est la moyenne temporelle quadratique du champ, par exemple le carré de l'amplitude du champ dans le cas harmonique [1, 6]. L'étude que nous allons mener se fera à une unique fréquence et la répartition transverse du champ électrique pourra être prise en compte. La modulation de l'indice de réfraction due à l'effet Kerr optique représentée par la relation (1.14) devient alors

$$n = n_0 + n_2 |E|^2 \quad (1.15)$$

où n_2 est le coefficient non-linéaire caractéristique du matériau. Dans ce cas, n_2 est couramment défini [1, 2] comme

$$n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{8n_0}. \quad (1.16)$$

et s'exprime en $m^2 \cdot V^{-2}$ (se reporter à l'annexe A pour plus de détails).

En pratique, il est plus commode d'utiliser une deuxième définition [1, 2, 31] faisant intervenir la densité de puissance I

$$n = n_0 + n_2^I I. \quad (1.17)$$

Les deux définitions de la modulation d'indice par l'effet Kerr optique sont bien évidemment équivalentes et peuvent être reliées par la relation suivante [1, 31]

$$I = \frac{1}{2} n_0 c \epsilon_0 |E|^2 \quad (1.18)$$

où c représente la vitesse de la lumière dans le vide. Donc, d'après les équations (1.15), (1.17) et (1.18), les coefficients n_2 et n_2^I sont liés par la relation suivante :

$$n_2^I = \frac{2n_2}{\epsilon_0 c n_0}. \quad (1.19)$$

Avec l'équation (1.16), nous pouvons alors en déduire l'expression du coefficient linéaire n_2^I

$$n_2^I = \frac{3\chi^{(3)}}{4\epsilon_0 c n_0^2}. \quad (1.20)$$

Nous remarquons alors que deux systèmes d'unités pour définir le coefficient non-linéaire n_2 peuvent être utilisés. Dans le cas de l'équation (1.15), n_2 est exprimé en $m^2.V^{-2}$ et pour l'équation (1.17), n_2^I est exprimé en $m^2.W^{-1}$ (voir l'annexe A pour plus de détails). C'est l'unité la plus couramment utilisée pour définir le coefficient non-linéaire caractéristique du matériau et que nous choisissons donc d'utiliser.

Une estimation de la valeur de n_2^I généralement admise pour l'étude de l'effet Kerr dans des fibres optiques en silice est [1, 65]

$$n_2^I = 3.2 \times 10^{-20} \quad m^2.W^{-1}.$$

En utilisant la relation (1.19), nous obtenons alors $n_2 = 6.16 \times 10^{-23} \quad m^2.V^{-2}$.

☞ **Hypothèse 5 :** Par soucis de simplicité, cette valeur sera considérée constante bien qu'elle varie avec la longueur d'onde et d'une fibre optique à une autre [1, 3].

Comme nous l'avons évoqué dans l'hypothèse 4, nous savons que la permittivité relative peut s'exprimer comme le carré de l'indice de réfraction donc $\epsilon_r = n^2$. Connaissant la valeur du coefficient non-linéaire n_2 , nous pouvons effectuer un développement à l'ordre 2 en E de l'équation (1.15). Nous en déduisons que

$$\epsilon_r = n_0^2 + 2n_0 n_2 |E|^2. \quad (1.21)$$

Si nous posons

$$n_{Kerr}^2 = 2n_0 n_2 \quad (1.22)$$

alors la permittivité relative en présence d'une non-linéarité Kerr optique s'écrit

$$\epsilon_r = n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} n_{Kerr}^2 |E|^2 \quad (1.23)$$

où $\mathbb{1}_{nl}$ correspond à la fonction indicatrice égale à 1 dans le milieu non-linéaire (présence d'un effet Kerr optique) et 0 dans le milieu linéaire.

Nous pouvons alors nous attendre à obtenir un indice de réfraction plus important là où le champ est fort. Une illustration simple de l'effet attendu est un matériau non-linéaire agissant comme une lentille convexe. Les solutions pourront donc se propager avec un meilleur confinement que dans le cas linéaire. C'est un des points que nous vérifierons au cours de cette étude.

1.4 L'équation de Helmholtz non-linéaire

Pour obtenir l'équation de propagation non-linéaire, nous utilisons les équations (1.1) et (1.9) pour obtenir la relation suivante

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}.\end{aligned}\quad (1.24)$$

Puis, en utilisant l'équation (1.2), il vient

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (1.25)$$

D'après l'équation constitutive (1.8), nous pouvons en déduire que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.26)$$

Il est alors utile de passer dans le domaine fréquentiel grâce à la transformée de Fourier. La dépendance temporelle devient donc fréquentielle où la transformée de Fourier du champ \mathbf{E}_t est \mathbf{E}_ω telle que

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_t e^{-i\omega t} dt. \quad (1.27)$$

L'équation (1.26) devient alors dans le domaine fréquentiel

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2 \mathbf{E}. \quad (1.28)$$

Or, les grandeurs μ_0 , ϵ_0 et c sont liées par la relation $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$. De plus, nous définissons le nombre d'onde k_0 tel que $k_0 = \omega/c$. L'équation suivante est alors déduite

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0. \quad (1.29)$$

Comme évoqué dans la section 1.3, nous considérons la présence d'une unique non-linéarité : l'effet Kerr optique. Dans ce cas, d'après l'équation (1.23), nous obtenons l'équation de Helmholtz vectorielle non-linéaire que nous voulons résoudre dans les fibres optiques :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} n_{\text{Kerr}}^2 |\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{E} = 0. \quad (1.30)$$

Chapitre

2

Méthode originale pour résoudre une équation non-linéaire scalaire

Introduction

NOUS ÉTUDIONS LA NON-LINÉARITÉ dans les fibres optiques suivant une nouvelle approche numérique. Dans cette perspective, nous avons choisi de débiter par un cas simplifié, l'approximation scalaire. Cette étape va nous permettre de valider notre méthode numérique et de limiter les difficultés susceptibles d'être rencontrées. Dans ce chapitre nous exposerons la méthode numérique originale permettant la résolution de la non-linéarité Kerr dans les fibres optiques. Cette méthode est constituée de *deux volets* :

- la Méthode des Éléments Finis permettant la modélisation de l'équation non-linéaire et des différentes fibres optiques étudiées. Dans un souci de simplicité et de clarté, nous présenterons cette méthode à travers son application au problème que nous voulons résoudre.
- l'algorithme de résolution du problème non-linéaire. Il est basé sur une re-normalisation particulière du champ que nous avons imaginée, mise au point et que nous allons présenter dans ce chapitre.

Enfin, nous dévoilerons succinctement le logiciel utilisé et les difficultés que nous avons rencontrées.

2.1 L'équation de Helmholtz présentant un effet Kerr optique dans l'approximation scalaire

2.1.1 Champ électrique scalaire

Nous voulons étudier les propriétés non-linéaires de la fibre optique micro-structurée dans sa dimension transverse. Pour l'étude de cette structure particulière nous avons choisi d'utiliser le système de coordonnées cartésiennes.

Dans cette perspective et pour l'approximation scalaire, le champ électrique \mathbf{E} est considéré comme ayant une *unique composante transverse* selon une direction arbitrairement fixée selon le vecteur unitaire \mathbf{e}_x (par exemple).

☞ **Hypothèse 6 :** Ceci est possible car la fibre optique parfaite maintient l'état de polarisation du champ. De plus, nous ne nous limiterons dans cette étude qu'à l'analyse du mode fondamental qui est linéairement polarisé (se reporter à l'introduction générale). Bien évidemment, nous vérifierons cette hypothèse dans l'approche vectorielle (Chapitre 5) en explicitant la polarisation des champs obtenus dans les cas linéaire (figure 5.7) et non-linéaire (figure 5.19).

Dans le cas linéaire, nous choisissons de prendre en considération le champ électrique correspondant à un mode propagatif sous la forme particulière suivante :

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \Re[\phi(x, y) e^{-i(\omega t - \beta z)}] \mathbf{e}_x \quad (2.1)$$

où ϕ représente l'amplitude scalaire du champ et dépend des deux composantes transverses x et y . De plus, $\omega = k_0 c$ est la pulsation, c la vitesse de la lumière dans le vide, $k_0 = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde, λ la longueur d'onde et β la constante de propagation. Enfin, \Re représente la partie réelle de la quantité caractérisée.

2.1.2 Obtention de l'équation non-linéaire scalaire

Dans un premier temps, nous allons développer le terme $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ de l'équation (1.30). Pour cela, nous savons que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (2.2)$$

où Δ représente l'opérateur Laplacien vectoriel tel que $\Delta f = (\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f)$ et $\Delta \mathbf{E} = \Delta E_x \mathbf{e}_x + \Delta E_y \mathbf{e}_y + \Delta E_z \mathbf{e}_z$. Or, d'après l'équation de Maxwell (1.3) et l'équation (1.8)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}) = 0. \quad (2.3)$$

En développant cette expression, il vient

$$\epsilon_r \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_r = 0 \quad (2.4)$$

puis en injectant cette relation dans l'équation (2.2), nous obtenons

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_r}{\epsilon_r} \right) - \Delta \mathbf{E} \quad (2.5)$$

D'après les équations (1.29) et (2.5), nous savons que nous devons résoudre

$$\Delta \mathbf{E} + k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -\nabla \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right]. \quad (2.6)$$

Dans le cadre de l'approximation scalaire et d'après l'expression (2.1), la solution recherchée est de la forme $\phi(x, y) e^{i\beta z - i\omega t} \mathbf{e}_x$. Si nous injectons cette solution dans l'équation précédente puis projetons successivement sur les axes 0x, 0y et 0z, il vient

$$\Delta_t \phi(x, y) - \beta^2 \phi(x, y) + k_0^2 \epsilon_r(x, y) \phi(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi(x, y)}{\epsilon_r(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_r(x, y) \right) \quad (2.7a)$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\phi(x, y)}{\epsilon_r(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_r(x, y) \right) \quad (2.7b)$$

$$0 = -i\beta \frac{\phi(x, y)}{\epsilon_r(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_r(x, y) \quad (2.7c)$$

☛ **Approximation :** Nous remarquons instantanément que l'équation (2.7c) implique que : $\partial \epsilon_r(x, y) / \partial x \rightarrow 0$

$$\Delta_t \phi(x, y) - \beta^2 \phi(x, y) + k_0^2 \epsilon_r(x, y) \phi(x, y) = 0.$$

Ceci prouve que *l'approximation scalaire et l'approximation du guidage faible sont liées*. Le terme $\nabla \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)$ peut donc être négligé dans l'équation (2.6). Le modèle scalaire revient à dire que la variation de l'indice de réfraction dans la fibre optique est négligeable sur une distance d'une longueur d'onde [9]. Nous étudierons dans la section 5.1 concernant le modèle vectoriel, l'effet de ce terme que nous avons négligé ici.

En prenant en compte les équations (1.30) et (2.5) ainsi que l'approximation précédente, nous en déduisons l'équation non-linéaire suivante

$$\Delta \mathbf{E} + k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} n_{Kerr}^2 |\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{E} = 0. \quad (2.8)$$

Puis, nous injectons l'expression (2.1) du champ dans le cadre de l'approximation scalaire. Ainsi, nous obtenons, avec la dépendance spatiale, l'équation non-linéaire scalaire que nous allons résoudre dans les fibres optiques :

$$\Delta_t \phi(x, y) + k_0^2 \left(n_0^2(x, y) + \mathbb{1}_{nl} n_{Kerr}^2 |\phi(x, y)|^2 \right) \phi(x, y) = \beta^2 \phi(x, y) \quad (2.9)$$

où $\Delta_t = (\partial_x^2 + \partial_y^2)$ représente l'opérateur Laplacien suivant les composantes transverses et n_{Kerr}^2 le coefficient non-linéaire caractéristique du matériau constant dans celui-ci.

2.2 La Méthode des Éléments Finis appliquée au problème étudié

Dans cette partie, nous allons présenter le *premier volet* de notre méthode numérique permettant la résolution du problème non-linéaire posé. Il s'agit de la Méthode des Éléments Finis (MEF) utilisée pour la modélisation numérique de l'équation scalaire (2.9) et de la fibre optique [17].

2.2.1 Le principe de la Méthode des Éléments Finis

La Méthode des Éléments Finis est une méthode numérique très générale qui permet le traitement d'une large classe d'équations aux dérivées partielles, incluant les problèmes non-linéaires et quasiment sans limitation sur la géométrie utilisée. En effet, cette méthode est particulièrement bien adaptée pour la modélisation de milieux inhomogènes engendrés par la présence d'un effet non-linéaire de type Kerr optique. Cette technique consiste à approximer les variables inconnues et permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un système creux d'équations linéaires.

Cette méthode de modélisation nécessite le découpage du domaine d'étude en sous-espaces élémentaires et de définir des conditions aux limites de ce domaine borné afin de garantir l'unicité des solutions. Le découpage de la structure constitue la réalisation du maillage du domaine. Les sous-espaces obtenus sont appelés les *éléments du maillage*. Des fonctions d'approximation ou *fonctions de forme* de la solution sont définies sur chacun des éléments à partir de valeurs calculées en un nombre fini de points positionnés sur chaque élément. Pour le cas scalaire, ces points sont appelés les *nœuds* du maillage. Les valeurs de ces fonctions en ces nœuds sont les degrés de liberté. L'approximation de la solution sur tout le domaine étudié est assurée par la somme, correctement pondérée, des fonctions d'approximation (ou fonctions de forme) définies par morceaux.

✎ **Remarque 2 :** Le cas vectoriel nécessite l'utilisation des nœuds (pour la composante longitudinale) et des *arêtes* (pour la composante transverse) comme nous le verrons dans la section 5.2.2.

Nous allons appliquer la Méthode des Éléments Finis à l'étude électromagnétique de la propagation d'une onde dans les fibres optiques.

✪ **Point clé :**

Pour modéliser l'équation (2.9) par la Méthode des Éléments Finis, nous devons procéder par étapes successives. La première partie concerne l'écriture de la *formulation faible* et constitue un préliminaire à la résolution du problème par la MEF. En effet, la présence d'une dérivée partielle d'ordre 2 dans l'équation (2.9) et l'utilisation de fonctions de forme de degré un, nous impose d'*affaiblir* l'équation vers l'ordre 1. La deuxième partie consiste à approximer la fonction ϕ par une combinaison linéaire de fonction de forme correctement pondérée : c'est le principe de la *méthode de Galerkin*.

Voici la démarche que j'ai choisie d'adopter pour présenter la Méthode des Éléments Finis à travers le problème non-linéaire que nous voulons résoudre :

Première partie : Formulation variationnelle du problème

- ❶ Nous posons le problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles (équation (2.9)). Cette équation est à satisfaire en tout point du domaine F représentant la coupe transverse de la fibre optique et qui peut présenter des conditions aux limites sur ses bords.
- ❷ Nous choisissons alors le domaine de définition \mathcal{D} du problème considéré en fonction des conditions aux bords (conditions de Dirichlet homogène, conditions de Neumann, ...).
- ❸ Nous multiplions l'équation aux dérivées partielles (2.9) par une *fonction de pondération ou fonction de forme* correctement choisie et appartenant à l'espace \mathcal{D} défini précédemment.
- ❹ Nous utilisons une intégration par parties classique (monodimensionnelle) ou généralisée (multidimensionnelle) pour *affaiblir* le problème. Ceci signifie que l'équation (2.9) passe d'une équation différentielle d'ordre 2 à une équation différentielle d'ordre 1.
- ❺ Nous en déduisons la formulation faible de l'équation différentielle initiale (2.9).

Deuxième partie : Méthode des Éléments Finis et méthode de Galerkin

- ❻ Nous définissons un sous-espace \mathcal{D}_m de dimension finie m , inclus dans l'espace de dimension infinie \mathcal{D} , pour rendre possible le traitement numérique.

- ⑦ Nous récrivons la formulation faible du problème approximé en dimension finie.
- ⑧ Nous appliquons alors la *méthode de Galerkin* qui consiste à écrire la fonction inconnue ϕ sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de forme correctement pondérées. Ceci permet d'obtenir un système discret (système matriciel) en choisissant successivement comme fonction de pondération dans la formulation faible ces mêmes fonctions de forme. Ce choix est très important car il permettra d'optimiser la vitesse de la résolution numérique de l'équation (obtention de matrices creuses).
- ⑨ Nous calculons alors la matrice A découlant de la discrétisation de la formulation faible. Un choix approprié des fonctions de forme permet d'obtenir une matrice creuse (notée matrice A) dont le traitement numérique est simplifié et accéléré.
- ⑩ Nous pouvons alors résoudre numériquement (par exemple avec la méthode d'Arnoldi [16, 7]) l'équation aux valeurs propres $A\phi = \beta^2\phi$ déduite de l'équation non-linéaire aux dérivées partielles (2.9) grâce à la méthode de Galerkin.

Par cette démarche, l'équation aux dérivées partielles a été transformée en un système creux d'équations linéaires.

2.2.2 Formulation faible de l'équation non-linéaire

La Méthode des Éléments Finis est une méthode d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles construite à partir d'une formulation équivalente du problème à résoudre ; il s'agit de la *formulation variationnelle* ou *formulation faible* du problème.

C'est un préalable à la MEF proprement dite. En effet, nous ne pouvons pas directement utiliser les éléments finis car ils nécessitent l'utilisation de fonctions de forme linéaires de degré 1 (éléments finis d'ordre 1). Or, comme l'équation (2.9) présente une dérivée seconde, ces fonctions de formes s'annulent. Pour contourner cette difficulté, plutôt que de prendre des dérivées sur des distributions, nous introduisons une formulation variationnelle ou *formulation faible*.

Enfin, notre domaine d'étude est la *section transverse* de la fibre, il s'agit donc d'un espace à deux dimensions.

Pour aboutir à la formulation faible du problème, nous devons définir l'espace de travail (point ②). Soit \mathcal{D} un espace vectoriel où le champ ϕ est défini. Sur le plan mathématique, nous relierons cet espace aux espaces fonctionnels les plus classiques qui prennent en compte la réalité physique du problème considéré, en particulier le plus simple, l'espace $\mathcal{L}^2(F)$ des fonctions de carré intégrable sur F (représentant la section transverse de la fibre optique). De plus, nous supposons que la fonction (ou le champ) ϕ est deux fois différentiable et que $\Delta_t\phi$ appartient également à $\mathcal{L}^2(F)$.

En résumé, l'espace \mathcal{D} est défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi \in \mathcal{L}^2(F), \quad \Delta_t \phi \in \mathcal{L}^2(F) \right\}$$

où Δ_t représente l'opérateur Laplacien transverse. Cet espace est défini dans la littérature comme un espace de Sobolev d'ordre 1 noté $\mathcal{H}^1(F)$. De plus, nous considérons la *condition de Dirichlet homogène* : le champ est nul au bord de la fibre :

$$\mathcal{D} = \left\{ \phi \in \mathcal{H}^1(F), \quad \text{condition de Dirichlet homogène} \right\}.$$

Cet espace est noté dans la littérature $\mathcal{H}_0^1(F)$. On a donc également l'inclusion suivante

$$\mathcal{H}_0^1(F) \subset \mathcal{H}^1(F) \subset \mathcal{L}^2(F)$$

✎ **Remarque 3** : L'étude du mode fondamental dans la fibre à saut d'indice est sans pertes. Le champ est donc nul à l'infini. En revanche, le mode fondamental est à pertes dans la FOM. Le champ ne serait donc pas nul à l'infini. Comme nous le verrons dans la section 3.2.2, une méthode numérique particulière est utilisée pour étudier le mode fondamental dans la FOM. Celle-ci consiste à utiliser une couche parfaitement adaptée autour de la fibre optique appelée *PML (Perfect Matching Layer)*. Le champ est, dans ce cas, nul sur le bord extérieur de la PML et les pertes sont correctement évaluées.

Nous pouvons à présent définir notre problème de manière plus précise :

$$\begin{cases} \text{Déterminer le champ } \phi \in \mathcal{H}_0^1(F) \text{ tel que :} \\ \Delta_t \phi + k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} n_{\text{kerr}}^2 |\phi|^2 \right) \phi = \beta^2 \phi. \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous allons maintenant mettre le problème (2.10) sous forme variationnelle. Cette démarche, préalable à l'approximation par la MEF d'une équation aux dérivées partielles, consiste en la multiplication de cette équation par une fonction de pondération appropriée (point ❸) et à l'intégration par parties sur le domaine F où est définie l'équation (point ❹).

On montre en analyse fonctionnelle l'équivalence suivante

$$\int_F \phi(x, y) \phi'(x, y) dS = 0 \quad \forall \phi' \in \mathcal{H}_0^1(F) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad (2.11)$$

où F représente la région transverse de la fibre optique (à saut d'indice ou microstructurée) et ϕ' la fonction de pondération. Comme nous nous plaçons dans le cas

bidimensionnel, il faut utiliser une intégration par parties généralisée dont l'écriture est donnée par la formule de Green à deux dimensions

$$\int_F \nabla \phi(x, y) \cdot \nabla \phi'(x, y) dS = - \int_F \phi'(x, y) \Delta_t \phi(x, y) dS + \oint_{\partial F} \phi'(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial n} dl \quad (2.12)$$

où ∂F est le contour du domaine F , $\phi'(x, y)$ la fonction de forme à choisir et $\partial \phi / \partial n$ la dérivée normale.

Si nous multiplions l'équation du système (2.10) par la fonction de forme ϕ' , l'intégration sur la coupe transverse F de la fibre optique donne

$$\begin{aligned} \int_F \phi'(x, y) \Delta_t \phi(x, y) dS + k_0^2 \int_F \epsilon_r(x, y) \phi(x, y) \phi'(x, y) dS \\ = \beta^2 \int_F \phi(x, y) \phi'(x, y) dS \quad \forall \phi' \in \mathcal{H}_0^1(F) \end{aligned} \quad (2.13)$$

où $\mathcal{H}_0^1(F)$ représente l'espace de Sobolev d'ordre 1 avec la prise en compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. La permittivité relative ϵ_r est définie d'après l'équation (1.23) par :

$$\epsilon_r(x, y) = n_0^2(x, y) + \mathbb{1}_{\text{nl}} n_{\text{Kerr}}^2 |\phi(x, y)|^2. \quad (2.14)$$

D'après la remarque 3, le champ est nul sur le bord extérieur de la fibre optique ce qui justifie le choix de la condition de Dirichlet homogène $((\phi, \phi') \in \mathcal{H}_0^1(F) \times \mathcal{H}_0^1(F))$. Dans ces conditions, l'intégrale curviligne disparaît.

Ainsi, en utilisant la formule de Green, la formulation faible de l'équation (2.13) est (point 5)

$$\boxed{\begin{aligned} - \int_F \nabla \phi(x, y) \cdot \nabla \phi'(x, y) dS + k_0^2 \int_F \epsilon_r(x, y) \phi(x, y) \phi'(x, y) dS \\ = \beta^2 \int_F \phi(x, y) \phi'(x, y) dS \quad \forall \phi' \in \mathcal{H}_0^1(F). \end{aligned}} \quad (2.15)$$

Il s'agit donc d'un *problème aux valeurs propres en β^2* où le paramètre d'entrée est la longueur d'onde λ (à travers le vecteur d'onde k_0) et où le terme non-linéaire se situe dans la permittivité relative ϵ_r donnée par l'équation (2.14).

Pour clarifier l'écriture des expressions, nous considérons l'application

$$a : \mathcal{H}_0^1(F) \times \mathcal{H}_0^1(F) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\phi, \phi') \rightarrow a(\phi, \phi')$$

une forme bilinéaire symétrique telle que :

$$a(\phi, \phi') = - \int_F \nabla \phi(x, y) \cdot \nabla \phi'(x, y) dS + k_0^2 \int_F \epsilon_r(x, y) \phi(x, y) \phi'(x, y) dS. \quad (2.16)$$

De plus, si nous considérons le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathcal{L}^2(F)$

$$\langle \phi, \phi' \rangle = \int_F \phi(x, y) \phi'(x, y) dS \quad (2.17)$$

alors nous admettons le théorème suivant [64] :

➤ **Théorème :** Toute solution du problème (2.10) est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Déterminer le champ } \phi \in \mathcal{H}_0^1(F) \text{ tel que :} \\ a(\phi, \phi') = \beta^2 \langle \phi, \phi' \rangle, \quad \forall \phi' \in \mathcal{H}_0^1(F) \end{cases} \quad (2.18)$$

Par simple remontée des calculs, il est facile de montrer que les problèmes (2.10) et (2.18) sont *équivalents*. En outre, c'est ce problème que nous pourrions résoudre numériquement car il se présente sous forme matricielle.

✎ **Remarque 4 :** la fonction a est une forme bilinéaire, continue et coercive (*i.e.* il existe une constante α telle que $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u \in F$). De plus, comme nous le savons, le produit scalaire euclidien est une forme définie, bilinéaire, symétrique et positive.

✎ **Remarque 5 :** dans la formulation (2.18) du problème, la dérivée seconde de la fonction n'apparaît pas ; cette formulation a donc un sens même si ϕ n'est pas deux fois continûment différentiable. Nous avons donc *affaibli* le problème.

Notons que cette formulation faible ne comporte pas explicitement de conditions aux limites ; celles-ci sont en fait incluses dans le choix de l'espace $\mathcal{H}_0^1(F)$ des fonctions tests associées au problème considéré.

2.2.3 Application de la méthode de Galerkin

La formulation faible définie précédemment est valable en *dimension infinie*. Cependant, pour permettre une résolution numérique du problème variationnel (2.18) issu de l'équation (2.10), nous devons projeter le domaine de définition précédent $\mathcal{H}_0^1(F)$ sur un espace de *dimension m finie* noté \mathcal{D}_m (point ❶) où m représente le nombre de nœuds de la structure modélisée.

Le domaine \mathcal{D}_m est engendré par les fonctions de forme α_j , $j = 1, \dots, m$ définies sur les nœuds dans le cas scalaire (figure 2.3) ou sur les nœuds et les arêtes dans le cas vectoriel (figure 5.2). Nous allons alors approximer la solution ϕ du problème (2.18) sous la forme d'une combinaison linéaire ϕ_m de fonctions de forme α_j telles que :

$$\phi_m(x, y) = \sum_{j=1}^m \phi_j \alpha_j(x, y) \quad \alpha_j \in \mathcal{D}_m \quad (2.19)$$

où le coefficient ϕ_j est l'inconnue du problème et représente la valeur du champ au nœud j . C'est le *principe de la méthode de Galerkin*. La fonction de forme α_j est définie comme étant égale à 1 au nœud j et égale à 0 sur les autres nœuds du domaine (voir FIG. 2.3). Ce choix permet l'obtention de matrices creuses.

Le problème en dimension finie associé au problème (2.18) devient alors (point 7)

$$\begin{cases} \text{déterminer les coefficients } \phi_m \in E_m \text{ tel que :} \\ a(\phi_m, \phi'_m) = \beta^2 < \phi_m, \phi'_m >, \quad \forall \phi'_m \in \mathcal{D}_m. \end{cases} \quad (2.20)$$

où ϕ_m est approximée par la combinaison linéaire de fonctions de forme (équation (2.19)) et ϕ'_m la fonction de pondération. En considérant la remarque 4, nous admettons le théorème suivant [64] :

➤ **Théorème :** La forme bilinéaire a étant symétrique et coercive, alors la résolution du problème (2.20) aboutit à la résolution d'un système algébrique linéaire dont la matrice $A = (a(\alpha_j, \alpha_i))$ est symétrique, définie positive.

Si nous utilisons dans l'équation (2.20) l'expression de ϕ_m donnée par la relation (2.19) et si nous remplaçons la fonction de pondération ϕ'_m par la fonction de forme α_i (point 8) alors il vient

$$\sum_{j=1}^m \phi_j a(\alpha_j(x, y), \alpha_i(x, y)) = \beta^2 \sum_{j=1}^m \phi_j < \alpha_j(x, y), \alpha_i(x, y) > \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.21)$$

★ **Point clé :**

Cette équation définit un système linéaire dont les inconnues sont les degrés de liberté $\{\phi_j\}_{j=1}^{j=m}$ représentant les composantes de ϕ_m dans la base $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j=m}$. Pour résoudre le système linéaire algébrique (2.21) pour chaque nœud i , nous résolvons une *équation linéaire aux valeurs propres à une inconnue* ϕ_j . La détermination de ϕ_j se fait en prenant une fonction de forme α_i de même nature que les fonctions de forme α_j .

Si nous écrivons le système (2.21) sous sa forme matricielle équivalente, nous obtenons une matrice A (point ⑨). La structure de cette matrice dépendra du choix de la base $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j=m}$ des fonctions de forme et de la numérotation des points du maillage, ce choix est capital.

Les fonctions de forme sont choisies à supports disjoints (figure 2.3), excepté pour les points strictement contigus, *i.e.* d'une part $\alpha_j(x, y)$ et $\alpha_{j-1}(x, y)$ et d'autre par $\alpha_j(x, y)$ et $\alpha_{j+1}(x, y)$. Cette propriété permet d'obtenir une matrice creuse¹ avec en général

$$\begin{cases} a(\alpha_j, \alpha_{j-1}) \neq 0, & a(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0, & a(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \neq 0 \\ a(\alpha_j, \alpha_i) = 0 & \text{dès que } |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

La résolution du système linéaire précédent sera d'autant plus facile que la matrice A est creuse voire de type bande suivant la diagonale. Une telle matrice est appelée "matrice Hessenberg" et est schématisée par la figure 2.1.

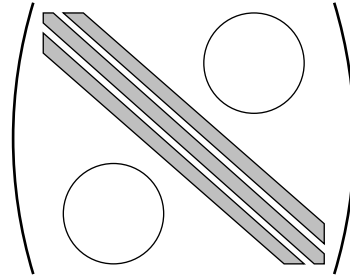


FIGURE 2.1 – Forme d'une matrice de type Hessenberg. Les régions grisées sont les emplacements des coefficients non nuls.

2.2.4 Principe et choix du maillage

Le découpage du domaine d'étude de dimension 2² entraînant la discrétisation de l'équation se fait en utilisant des éléments simples, par exemple des *triangles*. Ces éléments doivent respecter les conditions géométriques suivantes :

- le domaine d'étude est entièrement décrit par l'ensemble des éléments.
- deux triangles voisins doivent avoir en commun soit une arête, soit un sommet (figure 2.2).

1. Le calcul n'est pas réalisé ici car il est peu utile à la compréhension de la méthode.

2. Le choix de la finesse du maillage sera expliqué ultérieurement avec notamment l'utilisation du maillage adaptatif (section 3.3.2).

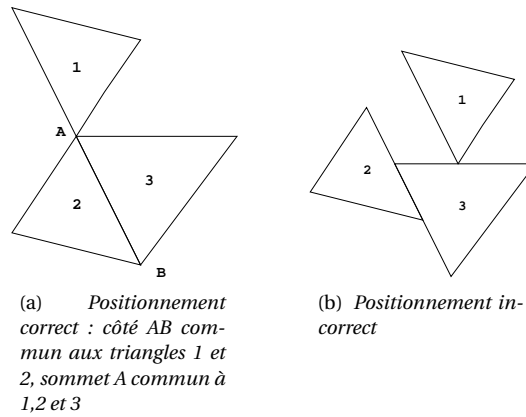


FIGURE 2.2 – Configuration géométrique du maillage d'un domaine à deux dimensions

Le choix le plus commode des fonctions de forme $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j=m}$ se fait quant à lui en utilisant une approximation ; il faut que ces fonctions soient continues par morceaux. Elles sont donc dans le cas bi-dimensionnel des fonctions linéaires (de degré 1) par rapport à x et à y définies sur chaque nœud : *approximation nodale* (dans le modèle scalaire). Dans le cas vectoriel, les nœuds et les arêtes des triangles seront pris en compte (voir la section 5.2.3 et en particulier la figure 5.2).

Comme nous l'avons expliqué précédemment, ces fonctions de forme constituent une base d'un espace fonctionnel de dimension finie. La figure 2.3 montre une fonction de forme α_j qui, comme nous l'avons choisi, est égale à 1 sur le nœud j et égale à 0 sur les autres nœuds du domaine. Ces fonctions sont interpolées linéairement avec les différents nœuds voisins (polynôme de degré 1).

Finalement, l'affaiblissement du problème associé à la méthode de Galerkin nous permet de passer de manière systématique d'une équation aux dérivées partielles locale (2.9) à une équation intégrale (2.18) et enfin à un système algébrique linéaire (2.22), dont le traitement numérique est facilité. Ainsi, la présentation de la Méthode des Éléments Finis nous permet de montrer le principal intérêt de cette méthode : sa grande souplesse pour la modélisation :

- des équations à résoudre
- des fibres optiques (comme nous allons le voir)
- de milieux non-linéaires donc inhomogènes.

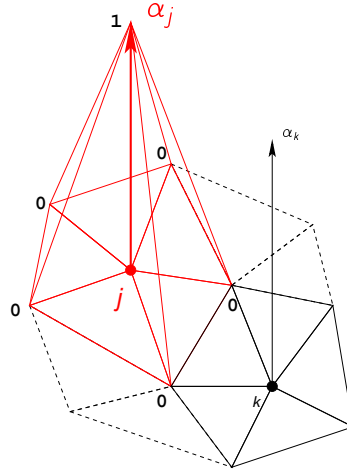


FIGURE 2.3 – Fonction de forme à support borné associée à un nœud j dans le cas du modèle scalaire. La fonction de forme α_j est égale à 1 au nœud j et 0 sur les autres nœuds suivant une fonction linéaire du premier ordre (polynôme de degré 1).

2.3 Présentation du processus itératif de résolution du problème non-linéaire

Dans la section 2.2 précédente, nous avons exposé le premier volet de la méthode numérique : il s'agit de la MEF permettant la modélisation du problème non-linéaire. Le second volet est la conception et la réalisation d'un processus itératif original permettant la résolution de la non-linéarité de type Kerr optique.

2.3.1 Utilisation de la méthode itérative de Picard

Nous ne pouvons pas résoudre numériquement et directement l'équation non-linéaire (2.9). Il faut donc la linéariser, c'est-à-dire trouver un algorithme itératif permettant de résoudre une suite de problèmes linéaires. La solution la plus naturelle est de choisir la méthode itérative de Picard dont le principe de base est relativement simple. Il consiste à injecter dans le terme non-linéaire à l'étape d'itération i la solution obtenue à l'étape $i - 1$.

Cette méthode a une vitesse de convergence assez faible (asymptotiquement linéaire) mais un grand rayon de convergence. C'est une des raisons de notre choix car nous savons que l'effet non-linéaire peut entraîner une modification importante de l'indice de réfraction. Il est donc difficile de connaître à l'avance une bonne approximation de la solution finale.

Dans cette étude, nous considérons un matériau avec un unique effet Kerr optique. Dans ce cas, nous pouvons transformer l'équation non-linéaire (2.9) en ef-

fectuant le changement de variable définissant le champ réduit ϕ_r :

$$\phi_r(x, y) = n_{Kerr} \phi(x, y) \quad (2.22)$$

où ϕ est la *solution du problème physique dépendant du coefficient non-linéaire du matériau* et ϕ_r est la *solution du problème numérique* que nous voulons résoudre. Notons que ϕ_r est sans dimension. Nous obtenons alors l'équation de Helmholtz non-linéaire définie dans un processus itératif

$$\Delta_t \phi_{r,i} + k_0^2 \left(n_0^2 + 1_{nl} |\phi_{r,i}|^2 \right) \phi_{r,i} = \beta_i^2 \phi_{r,i} \quad (2.23)$$

où β_i est la constante de propagation obtenue à l'étape i et $\phi_{r,i}$ est le champ associé. Ces deux grandeurs sont les inconnues du problème ci-dessus.

★ **Point clé :**

L'équation (2.23) est *indépendante* du coefficient Kerr non-linéaire caractéristique du matériau. Ceci signifie que la solution du problème et le profil d'indice associé seront aussi indépendants du coefficient n_{Kerr} . Dans ce cadre, si nous considérons que :

- la puissance (en watt) de la **solution physique** est définie par (voir l'annexe C) :

$$P_{phys} = \frac{\beta \epsilon_0 c}{2k_0} \int_F |\phi|^2 dS \quad (2.24)$$

- la grandeur P_{num} définie sur la section transverse de la fibre F est :

$$P_{num} = \frac{\beta \epsilon_0 c}{2k_0} \int_F |\phi_r|^2 dS \quad (2.25)$$

et correspond à la grandeur **déterminée à l'issue de la résolution numérique du problème indépendamment du coefficient Kerr**.

alors la puissance P_{phys} à injecter dans la fibre optique pour obtenir effectivement cette solution sera directement liée au coefficient non-linéaire caractéristique du matériau car, d'après l'équation (2.22),

$$P_{num} = n_{Kerr}^2 P_{phys} \quad (2.26)$$

Dans ces conditions, **plus le coefficient non-linéaire n_{Kerr}^2 sera important, plus la puissance physique P_{phys} à injecter dans la fibre optique pour obtenir la solution non-linéaire calculée numériquement (β, ϕ_r) sera faible.**

✎ **Remarque 6 sur les notations :** par soucis de clarté, nous n'écrirons pas les dépendances spatiales des fonctions utilisées lorsqu'elles sont implicites. En revanche, lors de leur première utilisation elles seront clairement explicitées.

□ **Principe de la méthode itérative de Picard appliquée au problème non-linéaire :**

- ❶ Nous choisissons comme point de départ naturel (à l'étape 0) d'injecter la solution issue de la résolution du problème linéaire

$$\Delta_t \phi_{r,0} + k_0^2 n_0^2 \phi_{r,0} = \beta_0^2 \phi_{r,0}. \quad (2.27)$$

Il s'agit de la résolution d'un *problème linéaire aux valeurs propres* où la valeur propre est la constante de propagation β_0^2 et où $\phi_{r,0}$ est le vecteur propre associé. Pour une longueur d'onde fixée (k_0 fixé), plusieurs modes sont obtenus après résolution du problème linéaire (2.27). Chaque mode est caractérisé par le couple (β_0, ϕ_0) où l'amplitude du champ ϕ_0 n'est pas fixée (problème linéaire).

- ❷ Nous choisissons, à travers la valeur propre β_0^2 , le mode que nous voulons étudier et auquel est associé le champ $\phi_{r,0}$. Comme nous l'avons déjà évoqué, c'est le *mode fondamental* qui sera pris en compte.
- ❸ À partir de ce champ, une nouvelle permittivité relative (*i.e.* un nouveau profil d'indice) est calculée : $\epsilon_{r,0}(x, y) = n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\phi_{r,0}|^2$. Il s'agit de la permittivité relative ϵ_r utilisée pour l'étape 1.
- ❹ Puis, dans l'étape suivante (étape 1), la résolution de la nouvelle équation *linéaire* aux valeurs propres est réalisée dans une fibre présentant la nouvelle permittivité issue de l'itération précédente. Nous en déduisons alors une valeur propre β_1^2 et un vecteur propre associé $\phi_{r,1}$ de telle sorte que nous obtenions une solution possédant la même symétrie que le mode linéaire initialement choisi à l'étape 0. Par exemple, pour le mode fondamental pris comme point de départ dans la fibre à saut d'indice, la répartition du champ est centro-symétrique. À l'étape 1 et tout au long du processus itératif, la répartition du champ doit toujours rester centro-symétrique. Dans ce cas, la symétrie du mode linéaire est conservée d'étape en étape.
- ❺ Le processus est répété jusqu'à ce que les valeurs de β^2 et de la permittivité relative ϵ_r atteignent un point fixe³ (convergence du processus).

Nous considérons que la convergence est atteinte lorsque la valeur absolue de l'écart relatif δ_i^{relat} entre deux valeurs de β obtenues à deux étapes successives est inférieure à 10^{-10} . Autrement dit

3. Nous appellerons ce point fixe la solution auto-cohérente (voir la définition et la figure 2.6 de la section 2.3.2).

$$\delta_i^{relat} = \left| \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{\beta_{i-1}} \right| < 10^{-10} \Rightarrow \text{obtention du point fixe.}$$

La figure 2.4 expose le principe de la méthode de Picard appliquée à l'équation (2.23). Ce processus se résume en une *succession de résolution de problèmes linéaires aux valeurs propres* où β_i^2 est la valeur propre et $\phi_{r,i}$ le vecteur propre associé à β_i^2 . Une solution linéaire ou non-linéaire est donc caractérisée à la fois par β_i et par $\phi_{r,i}$.

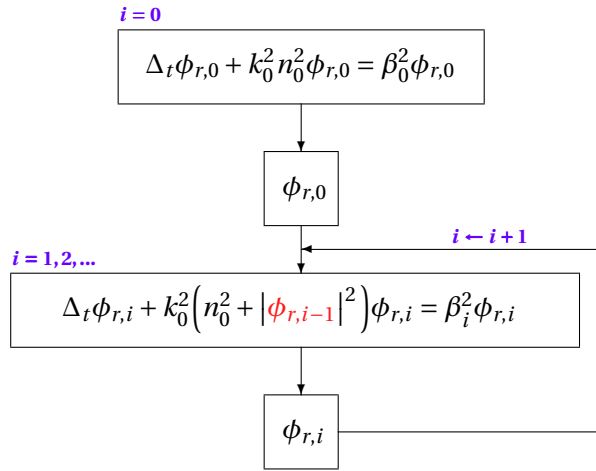


FIGURE 2.4 – Principe général de la méthode de Picard appliquée au problème non-linéaire scalaire. À chaque étape d'itération, la résolution d'un problème linéaire aux valeurs propres est effectuée dans une fibre optique présentant un profil d'indice de réfraction déterminée avec le champ obtenu à l'étape précédente.

2.3.2 Originalité de la méthode : la renormalisation du champ

⊛ Prise en compte du caractère non-linéaire du problème.

Ce processus semble *a priori* simple mais le caractère non-linéaire du problème n'a pas été pris en compte de manière correcte. En effet, dans la méthode présentée ci-dessus (figure 2.4), à l'étape i le champ issu de l'étape d'itération $i - 1$ est injecté sans que son amplitude ne soit fixée et ce dès l'étape 0 (point ❶). Nous effectuons la résolution d'une succession de problèmes linéaires aux valeurs propres où l'amplitude du champ obtenu n'est évidemment pas importante.

En effet, dans le cas linéaire, le principe de superposition s'applique : si $\phi_{r,0}$ est solution (champ propre associé au mode considéré) alors quel que soit le scalaire α , $\alpha\phi_{r,0}$ est aussi solution. Ce n'est évidemment pas le cas dans un

problème non-linéaire qui dépend de l'amplitude du champ ; le principe de superposition n'est plus applicable. Nous ne pouvons pas injecter n'importe quel champ dans le terme non-linéaire. Il faut donc *renormaliser* la grandeur $\phi_{r,i}$ ($i \geq 0$) à chaque étape d'itération de manière adaptée. Ceci constitue une des originalités de notre méthode.

Dans cette perspective, comment définir une normalisation adéquate du champ à injecter à chaque étape du processus ?

Normaliser le champ ϕ_r pour $i \geq 0$ revient à définir ϕ_r tel que

$$\phi_{r,i}(x, y) = \chi_i \psi_i(x, y). \quad (2.28)$$

L'expression et la valeur de χ est obtenue par l'annulation d'un résidu pondéré de l'équation (2.23). La solution ψ est prise elle-même comme fonction de pondération de façon à minimiser l'erreur là où le champ est le plus important. En pratique, ceci revient à dire que l'on effectue l'intégration de l'équation (2.23) multipliée par le conjugué de la fonction ψ sur le domaine, noté K , où il y a une non-linéarité Kerr.

□ **Technique nous permettant de déterminer le facteur de normalisation χ :**

Tout d'abord, le changement de variable (2.28) est utilisé dans l'équation (2.23) à l'étape d'itération i ($i \geq 1$). Dans ce cas, le champ ψ_i associé à la valeur propre β_i^2 est solution de l'équation non-linéaire

$$\Delta_t \psi_i + k_0^2 (n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\chi_i \psi_i|^2) \psi_i = \beta_i^2 \psi_i \quad (2.29)$$

L'annulation du résidu pondéré (qui constitue un critère de qualité dans le cadre de cette méthode) est basée sur la relation (2.11) où nous multiplions simplement l'équation (2.29) par la fonction de pondération $\overline{\psi_i}$ comme évoqué précédemment

$$\int_K \left(\Delta_t \psi_i + k_0^2 (n_0^2 + |\chi_i \psi_i|^2) \psi_i - \beta_i^2 \psi_i \right) \overline{\psi_i} dS = 0 \quad (2.30)$$

où K correspond au domaine transverse de la fibre optique présentant un effet Kerr optique et $\overline{\psi_i}$ le complexe conjugué de la fonction de pondération ψ_i tel que $\psi_i \overline{\psi_i} = |\psi_i|^2$. Si nous utilisons l'équation précédente (2.30) seule, nous pouvons en déduire une expression de χ_i . Cependant, l'étude numérique nous a montré que cette relation était mal conditionnée du fait que nous soustrayons des termes de valeurs similaires.

Pour s'affranchir de cette contrainte, nous annulons le résidu issu de l'équation linéarisée lors du processus itératif de Picard. Ainsi, nous avons

$$\int_K \left(\Delta_t \psi_i + k_0^2 (n_0^2 + |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2) \psi_i - \beta_i^2 \psi_i \right) \overline{\psi_i} dS = 0 \quad (2.31)$$

où $\chi_0 \psi_0 = \phi_{r,0}$ est la solution obtenue par la résolution du problème linéaire initial. De l'équation (2.30), il vient

$$\int_K \left(\Delta_t \psi_i + (k_0^2 n_0^2 - \beta_i^2) \psi_i \right) \overline{\psi_i} dS = -k_0^2 \int_K |\chi_i \psi_i|^2 |\psi_i|^2 dS \quad (2.32)$$

où χ_i est une constante dans la région présentant un effet Kerr optique. De l'équation (2.31), nous obtenons

$$\int_K \left(\Delta_t \psi_i + (k_0^2 n_0^2 - \beta_i^2) \psi_i \right) \overline{\psi_i} dS = -k_0^2 \int_K |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2 |\psi_i|^2 dS \quad (2.33)$$

En soustrayant les équations (2.32) et (2.33), nous en déduisons directement l'expression de χ_i^2

$$\chi_i^2 = \frac{\int_K |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2 |\psi_i|^2 dS}{\int_K |\psi_i|^4 dS}, \quad \forall i \geq 1. \quad (2.34)$$

Le coefficient de renormalisation χ_i ainsi défini ne fait pas apparaître de soustraction entre des termes similaires, cette expression est donc bien conditionnée.

De plus, nous posons arbitrairement $\chi_0 = 1$ pour $i = 0$ ce qui nous permet de définir χ_i pour tout i positif ou nul. La figure 2.5 résume ainsi le processus complet du nouvel algorithme imaginé au cours de cette thèse.

L'algorithme proposé correspond, comme évoqué pour la méthode de Picard simple (figure 2.4), à la résolution d'une suite de problèmes linéaires aux valeurs propres. Cependant, dans le cas de cet algorithme, le champ injecté dans le terme non-linéaire à chaque étape est correctement renormalisé par un coefficient déterminé par l'annulation de résidus pondérés (critère de qualité).

La grandeur d'entrée est la longueur d'onde (à travers le vecteur d'onde $k_0 = 2\pi/\lambda$) tandis que la solution en sortie sera représentée par le couple $(\beta, \chi\psi)$ (deux inconnues). L'itération est effectuée jusqu'à la convergence du processus ($\delta_i^{relat} < 10^{-10}$). Nous allons alors implémenter cet algorithme itératif pour résoudre l'équation non-linéaire scalaire (2.9) à l'aide de la Méthode des Éléments Finis.

Pour plus de clarté, nous appelons cet algorithme *SC_{LinN}*. Celui-ci nous permettra de déterminer les *solutions auto-cohérentes* (Self-Coherent) à partir de la solution du problème Linéaire Normalisée arbitrairement par $\chi_0 = 1$.

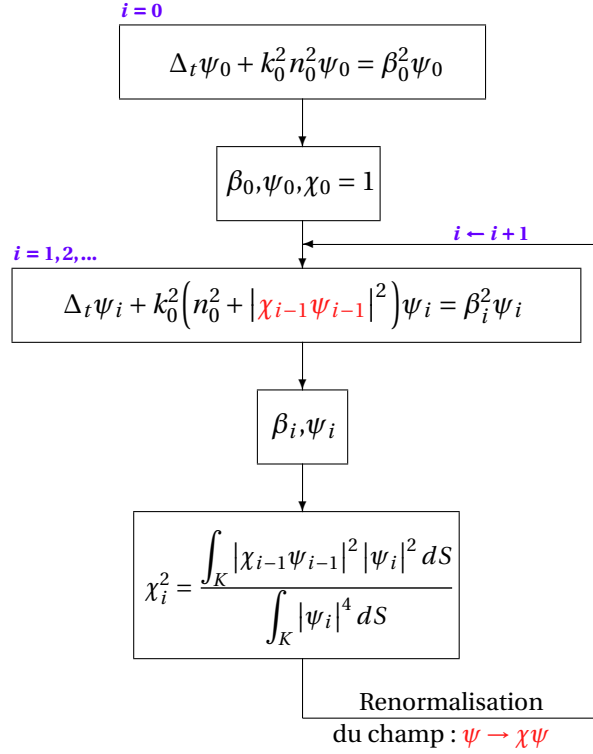


FIGURE 2.5 – Principe de l'algorithme proposé, basé sur la méthode de Picard et améliorée par la renormalisation du champ injecté dans le terme non-linéaire. Application au problème non-linéaire scalaire (2.9).

✪ **Définition d'une solution non-linéaire auto-cohérente (Partie 1)**⁴ :

Soit une solution ψ_i obtenue à l'étape i du processus itératif. $\chi_i \psi_i$ est alors injectée dans le terme non-linéaire et une nouvelle permittivité est obtenue : $\epsilon_{r,i}(x, y) = n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\chi_i \psi_i|^2$. La résolution de l'équation linéaire dans une fibre avec ce nouveau profil d'indice fournit alors une nouvelle solution $\chi_{i+1} \psi_{i+1}$. Si $\chi_{i+1} \psi_{i+1} = \chi_i \psi_i$ ceci signifie que la solution auto-cohérente $\chi_{coh} \psi_{coh}$ est telle que $\chi_{coh} \psi_{coh} = \chi_{i+1} \psi_{i+1} = \chi_i \psi_i$ (voir la figure 2.6). La solution auto-cohérente ψ_{coh} est donc la solution du problème non-linéaire obtenue à la convergence de notre processus itératif SC_{LinN} .

4. Se reporter à la section 3.4.1 pour la définition de la solution non-linéaire auto-cohérente complète.

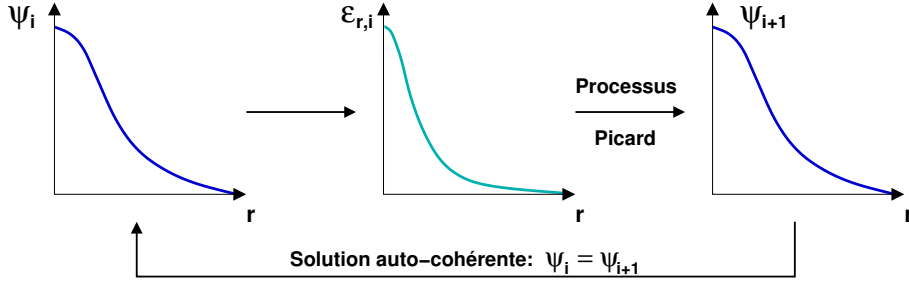


FIGURE 2.6 – Définition de la solution auto-cohérente : si aux étapes i et $i + 1$ du processus de Picard les champs ψ_i et ψ_{i+1} sont égaux, alors $\psi_i = \psi_{i+1} = \psi_{coh}$ où ψ_{coh} est le champ auto-cohérent associé à la valeur propre β_{coh} . Le profil de l'indice de réfraction est déduit de la permittivité relative $\epsilon_{r,i} = n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} |\chi_i \psi_{r,i}|^2$.

2.4 Le choix du logiciel de résolution : Gmsh/GetDP

Pour les simulations, j'ai utilisé le logiciel libre **Gmsh**. C'est un mailleur qui permet la modélisation des différentes géométries de fibres avec la Méthode des Éléments Finis. Il est associé à un solveur **GetDP** pour la résolution des problèmes aux valeurs propres. Gmsh et GetDP sont disponibles gratuitement sur le site internet (www.geuz.org) ainsi que les codes sources que nous avons compilé sur un calculateur multiprocesseur. Je vais effectuer une présentation rapide de ce logiciel et les raisons qui nous ont poussées à choisir cette solution.

2.4.1 Le logiciel de maillage Gmsh

Gmsh⁵ est un générateur automatique de maillage destiné à être utilisé par une Méthode Éléments Finis. Il est construit autour de 4 modules (figure 2.7) :



FIGURE 2.7 – Principe général du fonctionnement de Gmsh

→ la *géométrie* (Geometry) qui permet de définir (au moyen de points Point, de segments Line, de cercles Circle, ...) la structure de la fibre quelle que soit sa complexité. À partir de cette structure primaire, des régions (Plane Surface) sont définies. Enfin, les entités Point, Line et Plane Surface peuvent être représentées comme des entités physiques (figure 2.8). Pour une fibre optique, nous pouvons associer, par exemple, une condition sur un bord physique (Physical Line) ou une fonction représentant un indice de réfraction

5. Gmsh est téléchargeable à l'adresse (www.geuz.org/gmsh) où une présentation détaillée y est réalisée.

à chaque région physique (Physical Surface). Ceci montre la grande souplesse du logiciel et plus généralement de la Méthode des Éléments Finis.

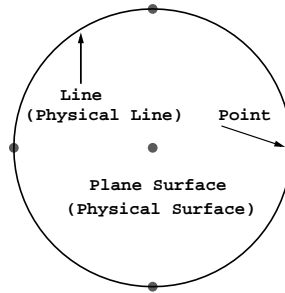


FIGURE 2.8 – Une exemple de géométrie obtenue avec Gmsh

Remarque 7 : dans Gmsh (et GetDP) l'unité de longueur est définie dans l'absolue par les grandeurs physiques que nous voulons utiliser. Dans notre cas, les dimensions transverses de la fibre seront de l'ordre du μm tout comme la longueur d'onde λ . L'important sera d'employer ces grandeurs de manière cohérente entre la géométrie définie et les propriétés physiques.

→ le *maillage* (Mesh) qui est automatiquement généré après l'implémentation de la géométrie et qui est principalement basé sur la triangulation de Delaunay [44, 45]. Dans la géométrie, une longueur caractéristique l_c est associée à chaque point et représente la finesse du maillage. Pour une longueur de segment donnée, plus la valeur de l_c diminue, plus le maillage est fin (figure 2.9).

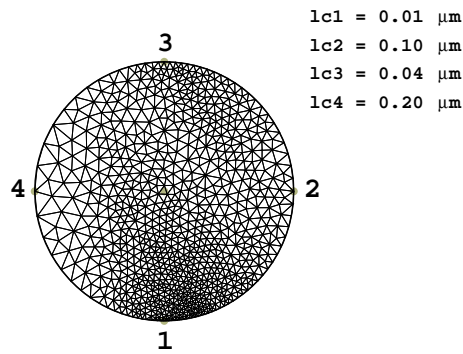


FIGURE 2.9 – Maillage de la géométrie obtenue avec Gmsh et pour différentes longueurs caractéristiques l_c .

→ le *solveur* (Solver) qui permet de résoudre l'équation non-linéaire dans la

fibre modélisée par la Méthode des Éléments Finis (voir la présentation de GetDP dans la section 2.4.2 suivante).

- le *post-processing* qui permet la visualisation du champ (ou d'autres grandeurs physiques) dans la fibre optique et pour les configurations scalaire et vectorielle. Le champ scalaire est représenté par des surfaces tandis que le champ vectoriel est représenté par des vecteurs tri-dimensionnels codés dans les deux cas par une échelle de couleurs.

Ainsi, ce logiciel libre offre de nombreux avantages pour notre étude dans les fibres optiques. Sa simplicité et sa modularité m'ont particulièrement aidées dans la modélisations des différentes géométries aussi complexes soient elles. Nous pouvons alors aborder la présentation du solveur GetDP.

2.4.2 Le solveur associé à Gmsh : GetDP

GetDP⁶ (pour *General environment for the treatment of Discrete Problem*) : est un solveur numérique interfacé à Gmsh permettant entre autre la résolution de problèmes électromagnétiques aux dérivées partielles par rapport aux deux dimensions transverses pour des modèles scalaires (comme l'équation (2.23)) ou des modèles vectoriels (comme l'équation (5.3)).

GetDP dispose d'un langage interprété dont la syntaxe, proche de celle du C, permet la définition de problèmes aux équations aux dérivées partielles sans devoir modifier les sources et les recompiler⁷. L'intérêt est de simplifier l'implémentation du problème à travers une organisation structurée et progressive du code (figure 2.10). L'ajout de fonctionnalités y est de plus possible ce qui dans notre cas a été primordial comme nous le verrons dans la section 2.4.4.

- *Group*, *Function* et *Constraint* correspondent aux caractéristiques physiques de la fibre optique où *Group* permet de faire correspondre la géométrie définie par Gmsh avec des régions physiques utilisées par GetDP. *Function* permet de définir les grandeurs physiques comme, entre autres, les indices de réfraction et la longueur d'onde. la fonction *Constraint* définit les conditions aux limites que l'on veut imposer aux bords de la fibre (étude de structures finies).
- *FunctionSpace*, *Formulation*, *Resolution* et *PostProcessing* forment la "boîte noire" où sont définies l'équation non-linéaire et la résolution de celle-ci. *FunctionSpace* correspond au choix des fonctions de base que nous utilisons en tenant compte des contraintes. *Formulation* est l'implémentation de la formulation faible du problème déterminée dans les modèles scalaire (équation 2.15) et en vectoriel (équation 5.22). *Resolution* correspond au choix de

6. GetDP est téléchargeable à l'adresse (www.geuz.org/getdp) où une présentation détaillée y est réalisée.

7. Nous avons installé Gmsh et GetDP en les recompilant sur plusieurs calculateurs multi-processeurs du laboratoire (sous UNIX). PETSc et Arpack ont notamment été utilisées.

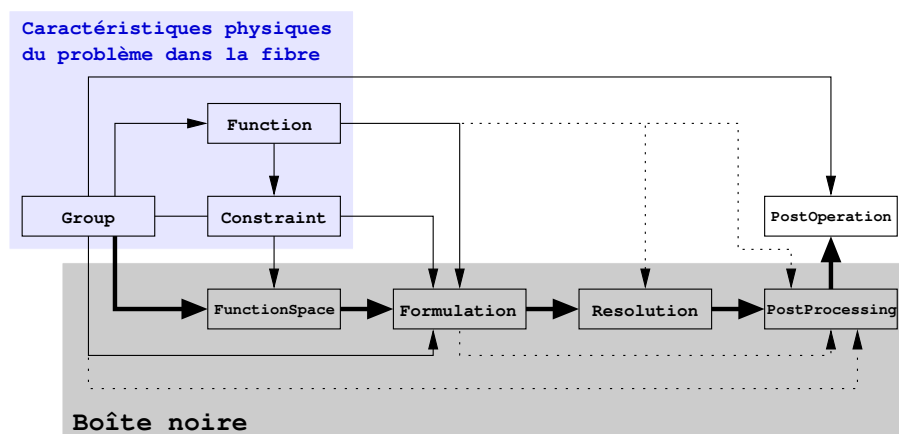


FIGURE 2.10 – Principe général du fonctionnement de GetDP

la méthode de résolution utilisée suivant la nature du problème (il s'agit ici d'équations aux valeurs propres). *PostProcessing* caractérise les fonctions que nous voulons calculer ou représenter en sortie.

→ *PostOperation* est le lien entre GetDP et l'extérieur permettant la visualisation et/ou l'écriture dans des fichiers des résultats souhaités.

Ainsi, nous avons choisi ce logiciel car les codes sources sont disponibles et gratuits. Ils peuvent donc être utilisés n'importe où et sur n'importe quelle machine en particuliers des calculateurs multi-processeurs disposant de mémoire vive conséquente. André Nicolet ayant participé à son développement, il connaît très bien les développeurs principaux P. Dular et C. Geuzaine. De ce fait, l'apprentissage de ces outils a été facilité et j'ai pu contacter Christophe Geuzaine concernant certaines difficultés rencontrées (et que nous expliciterons dans la section 2.4.4) lors de l'implémentation du modèle non-linéaire.

2.4.3 La méthode de résolution de l'équation aux valeurs propres

Comme expliqué dans la section 2.3.1, la résolution du problème non-linéaire se réduit à une succession de problèmes linéaires aux valeurs propres. Il peut alors se révéler intéressant d'étudier la méthode utilisée par GetDP pour résoudre le problème aux valeurs propres. Il est à noter que nous ne rentrerons pas dans les détails mathématiques de la méthode, ce n'est pas l'objet de cette thèse.

La méthode de résolution utilisée par GetDP est une méthode itérative de Krylov pour les matrices creuses symétriques (fournies par la Méthode des Éléments Finis). Il s'agit de la *méthode itérative d'Arnoldi* [7, 16] appliquée à une matrice A dite "creuse" (définie dans la section 2.2.3). D'une part, elle permet de construire progressivement une matrice de type Hessenberg (se reporter à la figure 2.1). Ce

type de matrice est particulièrement bien adaptée à la recherche de valeurs propres) dont l'ordre augmente à chaque étape d'itération. D'autre part, une fois cette matrice construite, elle permet d'extraire les valeurs propres de l'équation considérée. Il s'agit donc d'une méthode de préconditionnement des matrices pour résoudre des systèmes linéaires creux de grandes dimensions. Cette méthode est indispensable car la MEF génère des matrices creuses de grandes dimensions. Ce préconditionnement est destiné également à augmenter la vitesse de convergence de la méthode de résolution du système aux valeurs propres.

✪ Point clé :

La méthode d'Arnoldi permet de calculer plusieurs valeurs propres à la fois, autour d'une valeur appelée *décalage spectral* préalablement définie par l'utilisateur ce qui rend la méthode d'Arnoldi rapide. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3.1, au point de départ, un mode d'intérêt est choisi et doit être suivi tout au long du processus itératif. Dans GetDP, le décalage spectral est donc évidemment très important. Un préalable au réglage du décalage est bien sûr de connaître une estimation de la valeur propre que l'on veut trouver (suivant le mode que l'on veut étudier). Si le décalage n'est pas bien choisi, nous pouvons obtenir plusieurs valeurs propres inutiles pour l'étude du mode fondamental ou la divergence de la méthode d'Arnoldi (il n'y a pas de valeur propre trouvée).

Cette étape fondamentale est particulièrement délicate dans le cas de l'étude non-linéaire car la valeur propre β^2 évolue à chaque étape d'itération. Il faudra donc, dans un premier temps, visualiser la répartition du champ à chaque boucle non-linéaire du processus itératif afin de vérifier que nous suivons bien le même mode. Ainsi, il faudra *s'approcher le plus possible de la bonne valeur propre* pour n'obtenir que celle-ci et pour une convergence rapide de l'algorithme.

📌 **Remarque importante 8 :** Dans le cadre de l'étude du mode fondamental, la valeur propre correspond à la valeur de β^2 la plus importante dans le spectre. Son suivi au cours du processus itératif est donc relativement aisé. En effet, il suffit de fixer le décalage au-dessus de la valeur propre attendue en sachant que plus l'écart entre cette dernière et le décalage est faible plus la convergence est rapide. En revanche, pour l'étude des modes d'ordres supérieurs, cette étape est nettement plus délicate car les valeurs propres sont inférieures à celle du mode fondamental et très voisines entre elles. Leur suivi est donc difficilement réalisable au cours du processus itératif. C'est pourquoi nous avons privilégié l'étude du mode fondamental qui est en général le premier mode étudié.

2.4.4 Les difficultés rencontrées

Comme nous venons de le voir, l'étude d'un problème non-linéaire est particulièrement délicate. De plus, l'originalité de notre algorithme ajoute des difficultés quant à son implémentation. Enfin, le logiciel Gmsh couplé à GetDP n'est pas un logiciel "presse-bouton". Ceci permet donc l'implémentation de problèmes spécifiques mais entraîne de nombreuses difficultés qu'il a fallu surmonter.

Pour illustrer ces difficultés, nous présentons le principal problème rencontré. Il est venu de la renormalisation du champ présentée au paragraphe 2.3.2. Ainsi, à l'étape i du processus, nous devons résoudre l'équation non-linéaire suivante

$$\Delta_t \psi_i + k_0^2 \left(n_0^2 + 1_{nl} |\chi_{i-1} \psi_{i-1}|^2 \right) \psi_i = \beta_i^2 \psi_i. \quad (2.35)$$

Or, comme le montre l'expression de χ_{i-1} représentant l'amplitude du champ ψ_{i-1} ,

$$\chi_{i-1}^2 = \frac{\int_K |\chi_{i-2} \psi_{i-2}|^2 |\psi_{i-1}|^2 dS}{\int_K |\psi_{i-1}|^4 dS} \quad (2.36)$$

il faut pouvoir injecter à l'étape i , les champs obtenus aux étapes $i-2$ et $i-1$. À l'origine, il n'était pas possible dans GetDP de prendre en compte les champs obtenus à des itérations précédentes.

Dans un premier temps, nous avons traité un cas mono-dimensionnel à l'aide d'un programme C extérieur que nous avons implémenté. La démarche consistait non pas à considérer le champ complet mais un champ échantillonné sur un segment transverse de la fibre et obtenu avec GetDP. Cette démarche nous restreignait à l'étude du mode fondamental dans la seule fibre à saut d'indice (centrosymétrique) et était clairement très contraignante.

La solution était de pouvoir implémenter entièrement l'algorithme SC_{LinN} (figure 2.5) dans GetDP. Nous avons donc proposé à Christophe Geuzaine de faire évoluer son logiciel pour solutionner ce problème. Comme le montre le processus représenté par la figure 2.11, la solution était d'utiliser une étape de *PostOperation* (en rouge) permettant de sauvegarder les champs intermédiaires utiles à la renormalisation du champ. Pour cela, il a fallu définir des emplacements mémoires à l'aide de registres permettant —à l'intérieur du processus itératif— de sauvegarder puis d'utiliser les champs obtenus aux étapes précédentes.

Cet exemple montre combien il a été difficile d'implémenter notre algorithme SC_{LinN} avec GetDP. Cependant, la résolution de cette difficulté illustre également combien le choix de ce logiciel s'est avéré payant.

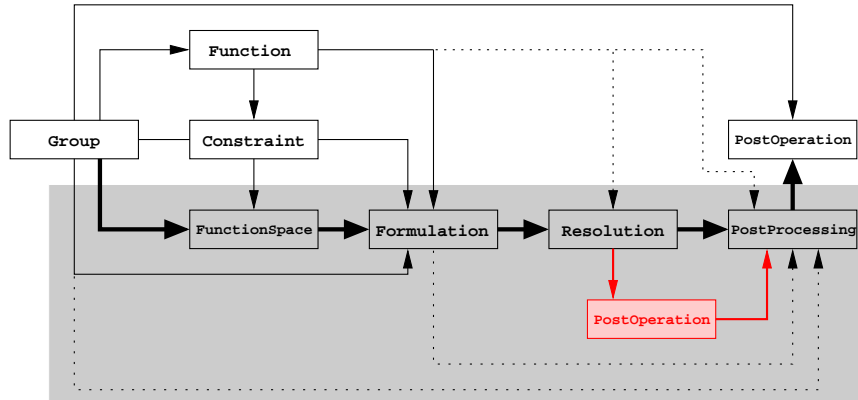


FIGURE 2.11 – Modification de GetDP pour permettre la renormalisation du champ à chaque étape de l'algorithme. Ajout d'une étape de "PostOperation" avec une nouvelle gestion de registres permettant de sauvegarder les champs obtenus aux itérations précédentes.

Conclusion

DANS UN PREMIER TEMPS, nous avons choisi de résoudre le problème non-linéaire dans le cas scalaire. Ceci nous a permis de mettre en place la méthode numérique de résolution de la non-linéarité Kerr optique dans ce cas simplifié. La première partie de cette approche originale concerne le choix de la méthode numérique permettant la modélisation des géométries et des équations à étudier : il s'agit de la Méthode des Éléments Finis. Cette méthode est particulièrement bien adaptée à la modélisation de milieux non-linéaires donc inhomogènes et de structures complexes comme les FOMs. Dans la deuxième partie de notre méthode, nous avons conçu un algorithme itératif original permettant la résolution du problème non-linéaire. Le cœur du processus consiste à renormaliser le champ injecté dans le terme non-linéaire à chaque itération. Enfin, le choix du logiciel basé sur la Méthode des Éléments Finis s'est porté sur Gmsh associé à GetDP. Nous avons travaillé en début de thèse en étroite collaboration avec Christophe Geuzaine pour pouvoir implémenter l'algorithme proposé et solutionner les difficultés liées à GetDP.

Ces trois étapes nous ont montré que l'étude du problème non-linéaire tel que nous l'abordons nécessite une approche pas-à-pas pour valider chaque étape et aboutir aux solutions non-linéaires souhaitées que nous allons maintenant présenter.

Chapitre

3

Vers une unique solution non-linéaire scalaire dans les fibres optiques

Introduction

CE CHAPITRE présente l'*analyse technique* de l'algorithme SC_{LinN} dans le but d'analyser les solutions non-linéaires obtenues dans les fibres optiques. Nous adopterons une démarche pas-à-pas, comme dans l'ensemble de ce manuscrit, afin de valider chaque résultat. En préliminaire, les fibres optiques dans lesquelles nous allons appliquer notre méthode numérique seront présentées. La première fibre optique étudiée sera la fibre conventionnelle à saut d'indice nous permettant d'aborder et de valider le cas linéaire puis le problème non-linéaire dans une géométrie bien connue. La deuxième fibre étudiée sera la fibre optique microstructurée à cœur plein présentant une structure transverse sensiblement plus complexe. Cette dernière nous permettra de confirmer et d'étendre la validité des résultats obtenus dans la fibre à saut d'indice. La vérification du cas linéaire se fera par comparaison de la MEF avec d'autres méthodes numériques : préliminaire au passage à la partie non-linéaire. Puis, nous présenterons les différentes techniques numériques que nous avons utilisées pour mettre au point et améliorer la nouvelle approche que nous proposons. Notons que les caractéristiques des solutions étudiées seront l'indice effectif $n_{eff} = \beta/k_0$ et le champ associé (avec son amplitude). En effet, la constante de propagation β et le champ associé sont les deux inconnues du problème et sont les représentations physiques de la solution suivant la longueur d'onde. Grâce à cette approche pas-à-pas, nous prouverons numériquement qu'il n'existe qu'une unique solution non-linéaire appelée dans ce manuscrit *solution non-linéaire auto-cohérente* ou *soliton spatial* pour une géométrie donnée et à une longueur d'onde fixée.

3.1 Présentation des fibres optiques étudiées

Nous allons présenter les deux types de fibres optiques analysées dans les chapitres 3, 4 et 5. Dans un premier temps, nous considérerons la fibre conventionnelle à saut d'indice. Nous choisissons de débiter par l'étude de cette fibre car sa géométrie est simple et ses caractéristiques bien connues. La mise en place de notre méthode numérique sera donc facilitée. Dans un deuxième temps, nous présenterons la fibre optique microstructurée à cœur plein qui ne sera étudiée qu'une fois la méthode validée dans le cas de la fibre à saut d'indice.

3.1.1 La fibre conventionnelle à saut d'indice

Les premières simulations concernent l'étude de la fibre conventionnelle à saut d'indice. Comme évoqué dans la section 2.1.2, nous allons nous placer dans l'approximation du guidage faible tel que l'écart relatif entre les indices de réfraction de deux milieux (1) et (2) soit négligeable devant l'unité. Dans ce cas, si n_1 et n_2 ($n_1 > n_2$) sont respectivement les indices de réfraction du milieu (1) et du milieu (2), alors l'approximation du guidage faible [63] se traduit par

$$\frac{n_1 - n_2}{n_2} \leq 10^{-2}. \quad (3.1)$$

□ La structure considérée

La structure guidante est supposée invariante par translation suivant l'axe z (composante longitudinale) et invariante par rotation autour de cet axe (FIG. 3.1).

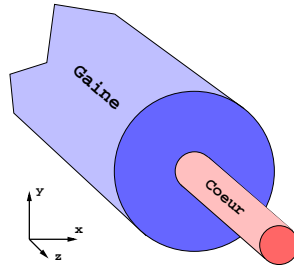


FIGURE 3.1 – Fibre à saut-d'indice avec un cœur de haut indice entouré d'une gaine "infinie" de bas indice.

Dans ces conditions et en respectant l'approximation du guidage faible, l'indice de réfraction linéaire est correctement représenté par la fonction n_0 telle que si R_c représente le rayon du cœur

$$n_0(x, y) = \begin{cases} n_{0,\text{guide}} = 1.45 & 0 \leq r \leq R_c \\ n_{0,\text{gaine}} = 1.435 & r \geq R_c \end{cases}$$

Nous considérons un cœur fabriqué en silice car c'est ce matériau qui est le plus couramment utilisé en pratique. Enfin, nous supposons constant l'indice de réfraction suivant la longueur d'onde pour faciliter la compréhension des phénomènes non-linéaires mis en jeu.

□ La modélisation

La modélisation de la fibre à saut d'indice se fait avec Gmsh. Nous implémentons la géométrie puis le maillage est généré automatiquement par le logiciel (figure 3.2). Une étude préalable du mode fondamental dans une fibre complète nous permet de réduire la structure à un quart de fibre tout en conservant une visualisation claire des résultats. Ceci est possible du fait des propriétés de symétrie de la fibre et du mode fondamental que nous souhaitons étudier. Cette technique nous permet de limiter le nombre d'éléments et donc d'améliorer la vitesse de calcul.

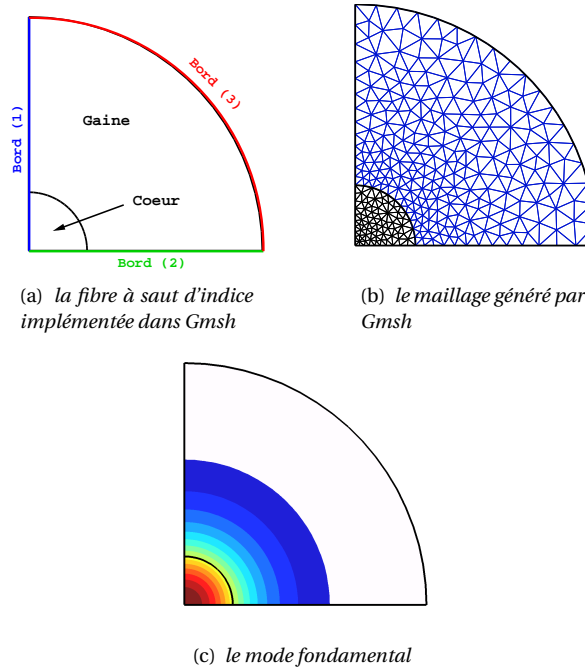



FIGURE 3.2 – Modélisation de la fibre à saut-d'indice.

Il suffit alors d'imposer les conditions aux bords adéquates pour sélectionner le mode désiré (FIG. 3.2(a)). Dans l'exemple du mode fondamental, nous n'imposons pas de conditions sur les bords (1) et (2) puisque le champ est centro-symétrique (il s'agit de conditions aux limites de Neumann implicitement définies dans GetDP :

dérivée du champ nulle). En revanche, nous imposons la valeur du champ nulle sur le bord (3), il s'agit de la condition de Dirichlet homogène comme évoqué dans le paragraphe 2.2.2 (conditions aux limites explicitement imposées dans GetDP).

 **Remarque 9 :** Connaissant la répartition centro-symétrique de mode fondamental dans la fibre à saut d'indice, nous pourrions modéliser la fibre par un segment (structure 1D). Cependant, nous voulons étudier les phénomènes non-linéaires dans les FOMs, présentant une structure transverse particulière, ce qui nécessite l'utilisation d'un modèle bi-dimensionnel.

3.1.2 La fibre microstructurée à cœur plein

Une fois que notre algorithme sera validé pour la fibre à saut d'indice, nous pourrions passer à la fibre optique microstructurée (FOM) à cœur plein. Comme nous l'avons évoqué en introduction de cette étude, la FOM présente de nombreux degrés de liberté permettant d'observer un plus grand nombre de phénomènes intéressants en comparaison de la fibre à saut d'indice.

En général, elle est composée d'une matrice de silice entourant des trous d'air de rayon a localisés sur les nœuds d'un réseau triangulaire. Les grandeurs caractéristiques sont :

- le “pitch” Λ qui représente la distance entre les centres de deux trous d'air voisins
- le rayon des trous a
- les indices de réfraction de la matrice et des trous.

Cependant, il existe de nouveaux verres intéressants dans l'étude des effets non-linéaires. Il s'agit des verres de chalcogénures qui peuvent présenter des effets non-linéaires jusqu'à 1000 fois supérieurs à ceux de la silice [40]. Dans le cadre de cette étude, il s'agit bien entendu d'un avantage comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3.1.

En effet, nous savons que la grandeur P_{num} déterminée à partir des solutions non-linéaires obtenues avec l'algorithme SC_{LinN} est $P_{num} = n_{Kerr}^2 P_{phys}$. De plus, nous savons que le processus itératif est indépendant du coefficient non-linéaire n_{Kerr}^2 caractéristique du matériau. Ceci signifie que si n_{Kerr}^2 est 1000 fois supérieur, alors la puissance à injecter pour obtenir la solution non-linéaire (caractérisée par P_{num}) est 1000 fois inférieure. L'utilisation des verres de chalcogénures pour la fabrication des FOMs est donc un avantage pour l'étude expérimentale de la non-linéarité dans ces structures.

La structure considérée

L'utilisation de la silice ou des verres de chalcogénure associés à la présence des trous d'air nous font bien évidemment sortir de l'approximation du guidage faible. Dans le cas linéaire, l'indice de réfraction n_0 est alors :

$$n_0(x, y) = \begin{cases} 1.45 & \text{dans la matrice en silice} \\ 1.0 & \text{dans les trous d'air} \end{cases}$$

La FOM peut être vue comme un réseau fini de trous d'air dans lequel une inclusion est omise au centre créant un défaut et constituant le cœur de la fibre où se propage le mode fondamental que nous souhaitons étudier. Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.3, l'utilisation des FOMs permet d'aborder une structure bien plus complexe et intéressante que la fibre à saut d'indice.

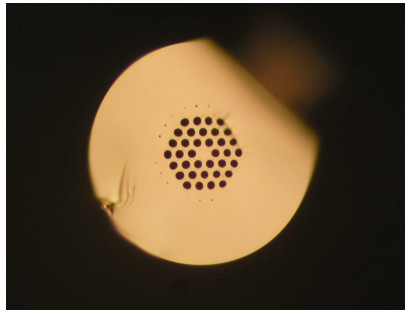


FIGURE 3.3 – Fibre optique microstructurée à cœur plein de diamètre extérieur égal à $140\ \mu\text{m}$ composée d'une matrice en verre de chalcogénure (présentant un fort coefficient non-linéaire environ 120 fois supérieur à celui de la silice) et de 3 rangées de trous d'air. (diam. cœur $\approx 10\ \mu\text{m}$). Photo : L. Brilland, J. Troles - Université de Rennes et Perfos.

En effet, la taille des inclusions et leur espacement Λ peuvent être modifiés. De ce fait, la taille du défaut central (cœur) peut varier de manière importante. Enfin, le contraste d'indice dans le cas linéaire est également beaucoup plus important que la fibre à saut d'indice. Ceci se traduit donc dans les propriétés physiques de la fibre et notamment la *modulation des effets non-linéaires*.

✍ **Remarque importante 10 :** La FOM étant constituée d'inclusions d'air entourées d'une matrice de silice, nous ne sommes plus dans l'approximation du guidage faible. Cependant, pour la validation de la méthode numérique et l'interprétation des résultats physiques mis en jeu, nous conserverons le modèle scalaire afin de faciliter la réalisation des calculs. En revanche, dans le chapitre 5, le cas vectoriel sans approximation sera étudié dans le but, d'une part, de quantifier l'effet des approximations utilisées et, d'autre part, de modéliser le problème dans son ensemble.

□ La modélisation

La figure 3.4 montre la modélisation de la fibre par la Méthode des Éléments Finis. Comme dans le cas de la fibre à saut d'indice, nous considérons un quart de

fibre pour limiter le nombre d'éléments et donc améliorer la vitesse de calcul. Il est à noter que le secteur géométrique irréductible est en réalité $\pi/3$ mais des raisons pratiques nous conduisent à prendre un secteur égal à $\pi/2$.

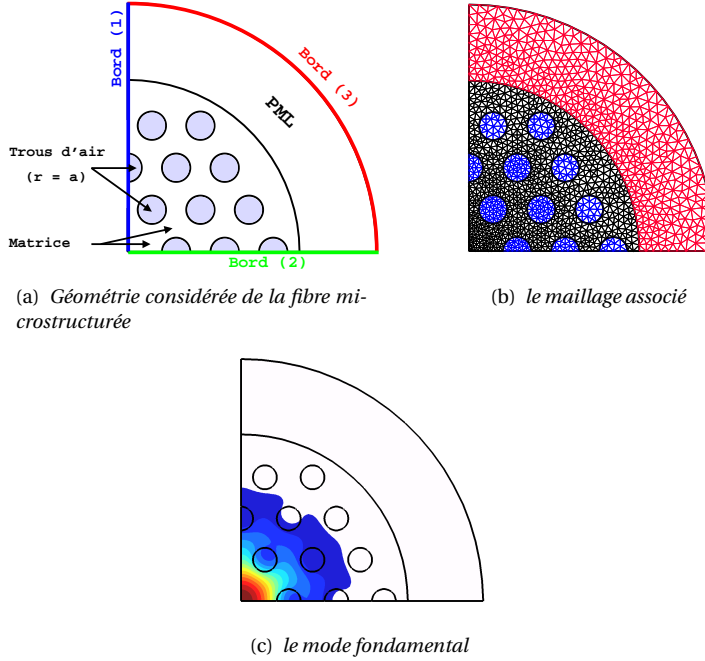


FIGURE 3.4 – Modélisation de la fibre optique microstructurée à cœur plein.

De plus, les figures 3.3 et 3.4 montrent que les inclusions d'air sont réparties suivant une maille triangulaire. Nous remarquons que la structure est invariante par rotation d'un angle égal à $2\pi/6$ (indice 6) et il y a exactement six plans de symétrie. Ces plans de symétrie appartiennent à l'axe de rotation et l'angle entre deux plans de symétries voisins est égal à $\pi/6$ (indice ν). Dans ce cas, cette symétrie est notée dans la littérature $C_{6,\nu}$ [17, 48, 49].

Pour l'étude du mode fondamental scalaire, nous pouvons donc modéliser la fibre suivant une section $\pi/3$ ou comme présenté ici suivant une section $\pi/2$ sans altérer la solution recherchée comme nous l'avons précédemment évoqué. En effet, l'étude préalable du mode fondamental dans une structure complète nous permet, comme pour la fibre à saut d'indice, de restreindre la géométrie à un quart de fibre. Des conditions de Neumann implicites sont appliquées sur les bords (1) et (2) (figure 3.4(a)). Ceci signifie que la dérivée du champ est nulle. Elles sont implicites car en pratique, dans GetDP, nous n'imposons pas de conditions aux limites sur ces bords. Enfin, nous définissons une condition de Dirichlet homogène explicite pour

le bord (3). Ces conditions seront différentes pour l'étude du mode fondamental vectoriel (section 5.4.2).

Afin de modéliser une géométrie infinie par une géométrie finie sans modifier les propriétés des solutions, nous utilisons une couche absorbante particulière appelée PML dont nous définirons le rôle dans la suite du manuscrit (section 3.2.2 et annexe B).

Nous venons de le voir, la géométrie de la fibre optique microstructurée est bien plus complexe. De plus, le nombre de degrés de liberté de la structure est bien supérieur à celui de la fibre à saut d'indice. Enfin, cette géométrie ne satisfait plus l'approximation du guidage faible : le contraste d'indice est d'environ 50% contre 1% dans le cas de la fibre conventionnelle. Ainsi, l'étude de la non-linéarité dans ces fibres est plus délicate et ce fera après la validation de la méthode numérique et des implications physiques dans la fibre à saut d'indice. Ceci s'inscrit dans la démarche pas-à-pas nécessaire au développement de notre approche de la non-linéarité.

3.2 Validation de la méthode numérique : étude du cas linéaire

Nous abordons un problème nouveau, l'étude du problème non-linéaire dans le cadre de l'approximation scalaire. Il va nous permettre de valider notre méthode numérique dans un cas simple. La première étape est bien évidemment de vérifier avec l'utilisation de différentes méthodes numériques existantes les résultats obtenus pour le problème linéaire scalaire. Nous rappelons que l'équation (2.27) est à résoudre dans ce cas :

$$\Delta_t \psi_0 + k_0^2 n_0^2 \psi_0 = \beta_0^2 \psi_0. \quad (3.2)$$

3.2.1 Comparaison des méthodes FFF-MS et Éléments Finis

La méthode FFF-MS (Fast Fourier Factorization - Mode Searching) est une Méthode Différentielle [10]. Cette dernière consiste à réduire les équations de Maxwell en un système d'équations différentielles du premier ordre à intégrer numériquement en exploitant les propriétés opto-géométriques de la structure étudiée. Dans le cas de son formalisme écrit en coordonnées cylindriques pour les FOMs [20, 38], les dépendances spatio-temporelles du champ électromagnétique sont explicitées par :

- l'hypothèse du régime harmonique
- l'invariance de la fibre optique selon son axe (0z)
- la périodicité intrinsèque selon la variable angulaire.

Ceci permet de développer les grandeurs opto-géométriques en séries de Fourier. Toutefois, la résolution numérique de cette théorie nécessite l'emploi de deux méthodes sous-jacentes.

La première appelée “Fast Fourier Factorization” (FFF, ou “Factorisation Rapide de Fourier”) [10] permet d'exprimer dans l'espace de Fourier tronqué les relations constitutives des milieux (équations (1.8) et (1.9)) par application des règles de factorisation adéquates [57] qui tiennent compte des discontinuités des champs aux interfaces des différents milieux.

La seconde méthode appelée “Algorithme de propagation de la matrice S” [56] vise à enrayer les problèmes de contaminations numériques qui apparaissent lors de l'intégration du système différentiel.

Avec cette méthode *vectorielle*, nous allons vérifier les résultats obtenus avec la Méthode des Éléments Finis dans une formulation scalaire pour la fibre à saut d'indice et dans le cadre de l'approximation du guidage faible pour cette géométrie (figure 3.5). Nous considérons une fibre à saut d'indice dont le rayon du cœur est $R_c = 2.0 \mu\text{m}$. L'indice de réfraction du cœur est $n_{0,\text{guide}} = 1.45$ et dans la gaine $n_{0,\text{gaine}} = 1.435$. La comparaison de l'indice effectif à partir de la méthode FFF-MS (vectorielle) peut donc se faire de manière précise.

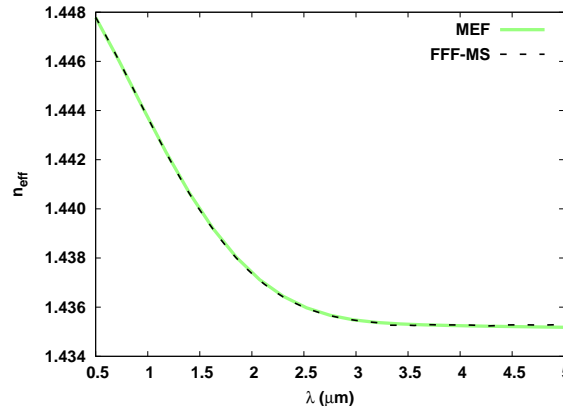


FIGURE 3.5 – Comparaison de l'indice effectif obtenu par la MEF dans le modèle scalaire et la FFF-MS (modèle vectoriel) dans une fibre à saut d'indice de rayon de cœur $R_c = 2.0 \mu\text{m}$ et d'indices de réfraction $n_{0,\text{guide}} = 1.45$ et $n_{0,\text{gaine}} = 1.435$.

La figure 3.5 montre la parfaite cohérence des valeurs de l'indice effectif obtenues avec les deux méthodes et ce pour toute la plage des longueurs d'onde étudiée.

Une comparaison plus précise est effectuée dans le tableau 3.1. Nous remarquons que l'écart relatif Δ_{lin} entre les deux valeurs données par les méthodes FFF-MS et Éléments Finis est de l'ordre de 10^{-5} . Les valeurs de Δ_{lin} augmentent avec la longueur d'onde pour deux raisons :

λ (μm)	n_{eff} - FFF-MS	n_{eff} - MEF	Δ_{lin}
0.5	1.447792899	1.447785	5.44219×10^{-6}
2.75	1.435656766	1.435669	8.45318×10^{-6}
5.0	1.435283937	1.435179	7.30130×10^{-5}

TABLE 3.1 – Comparaison des valeurs de l'indice effectif du mode fondamental fournies par la méthode FFF-MS et la MEF pour une fibre optique à saut d'indice de rayon de cœur $R_c = 2.0 \mu\text{m}$. Δ_{lin} correspond à l'écart relatif entre les deux valeurs données par les méthodes FFF-MS et Éléments Finis.

- La structure de la fibre à saut d'indice modélisée n'est pas infinie se qui altère très légèrement les calculs pour les grandes longueurs d'onde.
- Le modèle scalaire s'écarte très légèrement du modèle vectoriel (méthode FFF-MS) pour les grandes longueurs d'onde puisque le champ est fortement délocalisé dans la structure. L'effet de l'interface cœur gaine est donc plus important.

3.2.2 Utilisation des PMLs pour l'évaluation des pertes

Nous allons à présent comparer les résultats obtenus par la MEF dans les fibres optiques microstructurées.

Contrairement à la fibre à saut d'indice, ces fibres sont constituées d'une région infinie de haut d'indice. Dans ce cas, les constantes de propagation et donc les indices effectifs des modes de cette structure présentent une partie imaginaire non nulle [17]. En effet, la FOM est constituée d'une matrice de silice avec un nombre fini de rangées d'inclusions. Au delà de ces rangées, l'indice de réfraction linéaire dans la FOM est constant ce qui entraîne l'existence de pertes (partie imaginaire de l'indice effectif non nulle). "Malheureusement", l'utilisation d'une méthode numérique quelle qu'elle soit, nous oblige à borner le domaine d'étude tout en conservant les propriétés physiques.

La technique la plus intéressante est d'entourer le domaine d'étude d'un milieu artificiel absorbant dans lequel les ondes sont atténuées. Le calcul de la partie imaginaire de l'indice effectif est réalisé avec l'utilisation d'une couche absorbante *circulaire* appelée couche parfaitement adaptée ou PML (Perfect Matching Layer) [39, 33]. Cette technique consiste à modifier les équations de Maxwell de manière à absorber les réflexions à l'intérieur du milieu considéré. Ainsi, la transmission du champ entre la fibre et la couche absorbante ainsi adaptée ou PML se fait sans réflexion quelle que soit la longueur d'onde ou la polarisation.

Les calculs théoriques ont été réalisés pour définir une *PML scalaire circulaire* entourant une fibre optique microstructurée [66]. Notons qu'il est également possible de déterminer et d'implémenter des PMLs rectangulaires autour des FOMs

[33]. Concrètement, il nous suffit de modifier la permittivité $\epsilon_{r,0}^{Z.T.}$ de la Zone de Transition (région linéaire et circulaire autour de la structure) de la fibre (FIG. 3.4(a)) en introduisant un tenseur T_{PML} représentant les caractéristiques de la PML tel que

$$\epsilon_{r,0}^{Z.T.} \quad \text{devient} \quad T_{PML} \epsilon_{r,0}^{Z.T.} \quad (3.3)$$

Nous explicitons dans l'annexe B ce tenseur et comment adapter ces couches PMLs pour évaluer au mieux les pertes, quantifiables par le calcul de la partie imaginaire de l'indice effectif.


3.2.3 Comparaison des méthodes Multipolaire et Éléments Finis

Une fois que la PML a été optimisée¹, les résultats obtenus dans le cas scalaire avec PML sont comparés avec ceux obtenus avec une autre méthode numérique cette fois-ci partiellement analytique : la Méthode Multipolaire (MM).

La méthode Multipolaire est une méthode numérique qui permet de déterminer avec une très grande précision et une très grande rapidité les modes (éventuellement à pertes) des fibres optiques microstructurées. Elle est la méthode de référence pour l'étude des propriétés physiques des FOMs et est basée sur l'utilisation du développement en série de Fourier-Bessel des champs électro-magnétiques. Elle peut en outre tenir compte des éventuelles pertes matériaux.

Sa précision et son efficacité proviennent des raisons suivantes :

- Les équations de Maxwell sont réduites à un système ne faisant plus intervenir que des composantes longitudinales des champs électrique et magnétique.
- Dans sa version où seules des inclusions circulaires sont considérées, une grande partie des calculs est effectuée analytiquement ce qui réduit considérablement le nombre de calculs à effectuer numériquement.
- Les propriétés de symétries des structures à modéliser peuvent être prises en compte dans la description des symétries des modes qu'elles supportent. Ceci réduit la taille des systèmes à calculer.
- Du point de vue théorique, un seul paramètre numérique existe dans la méthode : il s'agit de l'ordre de troncature des développements de Fourier-Bessel. Ceci facilite grandement les études de convergence des résultats.

 **Remarque 11 :** Cette méthode semi-analytique nous donne donc des résultats très précis dans le cas *vectoriel* ce qui permet de faire une comparaison

1. Voir la démarche dans l'annexe B.

quantitative des résultats *scalaires* fournis par la Méthode des Éléments Finis. Nous pourrions par ailleurs déterminer l'effet de l'approximation scalaire dans le cas linéaire par rapport au cas vectoriel sans approximation de la Méthode Multipolaire.

Pour cela, nous considérons une fibre optique microstructurée dans laquelle le pitch $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$, le rayon des inclusions d'air $a = 0.5 \mu\text{m}$ et l'indice de réfraction linéaire de la matrice $n_0 = 1.4439035654$ [20].

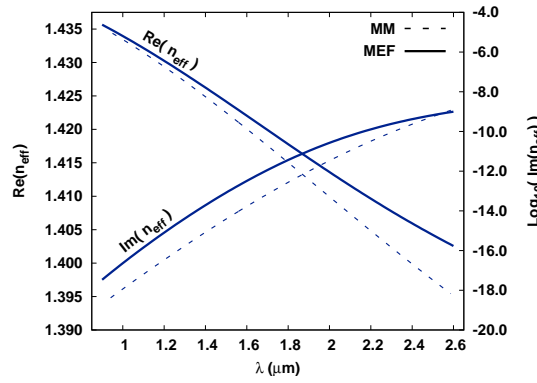


FIGURE 3.6 – Comparaison des parties réelles et imaginaires de l'indice effectif pour la MEF dans le modèle scalaire et la MM vectorielle pour une FOM à trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 0.5 \mu\text{m}$ et de pitch $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$.

Pour les faibles longueurs d'onde ($\lambda/\Lambda < 0.5$), les résultats donnés par la MEF dans le modèle scalaire sont voisins de ceux fournis par la Méthode Multipolaire vectorielle. Comme le montre la figure 3.6 et le tableau 3.2, cette tendance est non seulement remarquable pour la partie réelle de l'indice effectif (l'écart relatif est de l'ordre de 0.1%) mais aussi pour la partie imaginaire. Ceci s'explique par le confinement important du champ dans le cœur de la fibre. Ces résultats valident donc :

- l'approximation scalaire pour les faibles longueurs d'onde
- les résultats linéaires obtenus par notre méthode numérique.

Pour des longueurs d'onde plus importantes ($\lambda/\Lambda > 0.5$), l'écart entre la partie réelle de l'indice effectif des cas scalaire et vectoriel augmente car le champ est plus étalé dans la structure. L'influence des trous d'air est alors plus importante et de fait l'approximation du guidage faible devient moins précise. Notons enfin que la similitude de la valeurs des pertes pour des longueurs d'onde voisines de $\lambda = 2.5 \mu\text{m}$ ne signifie pas que celles-ci sont parfaitement évaluées par la MEF scalaire dans cette région. Il s'agit simplement d'un croisement entre les valeurs obtenues par la MM

		MM	MEF	Δ_{lin}
$N_r = 2$	$Re(n_{eff})$	1.4210361	1.4230792	0.001438
	$Im(n_{eff})$	2.3807×10^{-5}	2.1694×10^{-5}	0.0888
$N_r = 3$	$Re(n_{eff})$	1.4210465	1.4228891	0.001298
	$Im(n_{eff})$	8.118×10^{-7}	7.458×10^{-7}	0.0814

TABLE 3.2 – Comparaison des valeurs de l'indice effectif du mode fondamental données par la MM vectorielle et la MEF du modèle scalaire pour une fibre optique microstructurée à deux et trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 0.5 \mu m$, de pitch $\Lambda = 2.3 \mu m$ et pour $\lambda = 1.56 \mu m$. Δ_{lin} correspond à l'écart relatif entre la valeur fournie par la MM et celle donnée par la MEF

vectorielle et la MEF dans le modèle scalaire.

Cependant, pour étudier l'effet Kerr optique dans les fibres optiques, l'approximation scalaire est suffisante. Une fois que les phénomènes engendrés par la non-linéarité auront été compris et expliqués dans le cas scalaire, l'étude du cas vectoriel (chapitre 5) nous permettra d'aborder le problème non-linéaire sans approximation.

Ainsi, les résultats montrés par les figures 3.5 et 3.6 et les tableaux 3.1 et 3.2 nous permettent de valider notre méthode numérique. Nous pouvons maintenant aborder l'étude de l'effet Kerr optique dans les fibres à l'aide d'une méthode numérique fiable dans le cas linéaire.

3.3 Premiers résultats dans le cas non-linéaire

Comme nous venons de le voir, la méthode numérique utilisée dans le cas scalaire linéaire est parfaitement valable. Nous pouvons alors aborder la partie non-linéaire. Dans ce cas, nous rappelons que l'équation (2.29) est à résoudre

$$\Delta_t \psi + k_0^2 (n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} |\chi \psi|^2) \psi = \beta^2 \psi \quad (3.4)$$

3.3.1 Étude de la convergence

La première question que nous devons nous poser est : l'algorithme SC_{LinN} présenté dans la section 2.3.2 est-il convergent en présence d'une non-linéarité Kerr ?

✓ Cas de la fibre optique à saut d'indice

Nous considérons une fibre à saut d'indice possédant un cœur de rayon $R_c = 2 \mu m$, d'indice de réfraction $n_{0,guide} = 1.45$ et entouré d'une gaine infinie d'indice de réfraction $n_{0,gaine} = 1.435$. Nous remarquons que la convergence (telle que nous

l'avons définie au paragraphe 2.3.1) est rapidement atteinte (figure 3.7).

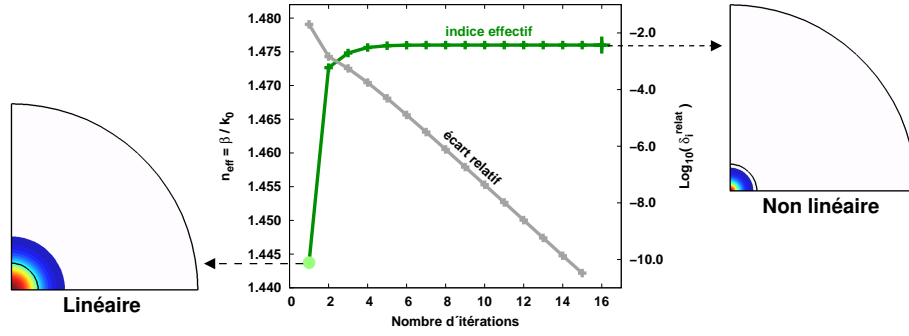


FIGURE 3.7 – Convergence de l'algorithme SC_{LinN} et écart relatif associé pour la fibre à saut d'indice décrite. Représentation du champ dans les cas du mode fondamental issu de la résolution du problème linéaire et de la solution non-linéaire associée à ce mode.

Après 16 étapes d'itération, l'écart relatif δ_i^{relat} entre deux valeurs de β obtenues à deux étapes successives est effectivement inférieur à 10^{-10} . La figure 3.7 montre également la répartition du champ dans le cas linéaire (étape 0) et dans le cas de la présence de l'effet Kerr optique à la convergence (étape 16). L'effet non-linéaire entraîne ainsi un confinement du champ dans le cœur de la fibre à saut d'indice[30].

✓ Cas de la fibre optique microstructurée

Une fois la convergence vérifiée dans le cas de la fibre à saut d'indice, nous pouvons passer à l'étude de la fibre optique microstructurée.

Nous considérons une fibre à trois rangées de trous d'air entourées d'une matrice de silice présentant un effet Kerr optique. Le pitch Λ est égal à $6 \mu\text{m}$ et le rayon des trous est $a = 1.5 \mu\text{m}$ de telle sorte que le rapport du diamètre des trous d'air sur le pitch est égal à 0.5 (voir la figure 2 dans l'introduction générale).

Comme dans le cas de la fibre à saut d'indice, la convergence est atteinte rapidement (figure 3.8). En effet, après seulement 17 étapes d'itération, $\delta_i^{relat} < 10^{-10}$.

Concernant l'effet de la non-linéarité sur la répartition du champ, nous observons le même phénomène que dans la fibre à saut d'indice (figure 3.7) : l'effet Kerr optique entraîne un fort confinement du champ au centre de la fibre. Notons que le profil transverse de la FOM (notamment la première rangée d'inclusions d'air) semble jouer un rôle non négligeable. Nous étudierons ce point dans le chapitre suivant (en particulier dans la section 4.2.2).

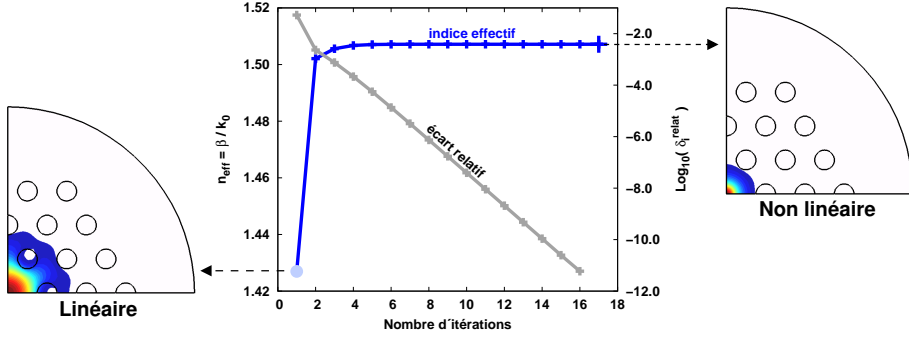


FIGURE 3.8 – Convergence de l'algorithme SC_{LinN} et écart relatif associé. Représentation du champ pour la FOM dans les cas linéaire et non-linéaire.

3.3.2 Utilisation du maillage adaptatif

Comme nous venons de le voir dans les deux types de guides, la présence d'un effet non-linéaire Kerr entraîne un confinement important du champ au centre des fibres optiques (figures 3.7 et 3.8). Lorsque nous effectuons un zoom sur cette région dans le cas par exemple de la fibre à saut d'indice (figure 3.9), nous remarquons que seulement quelques triangles du maillage servant à la modélisation de la fibre permettent de calculer le champ là où il est important.

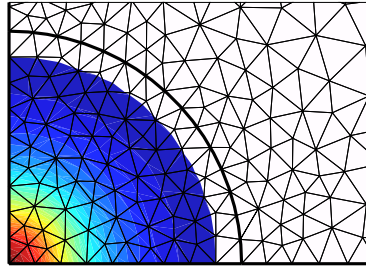


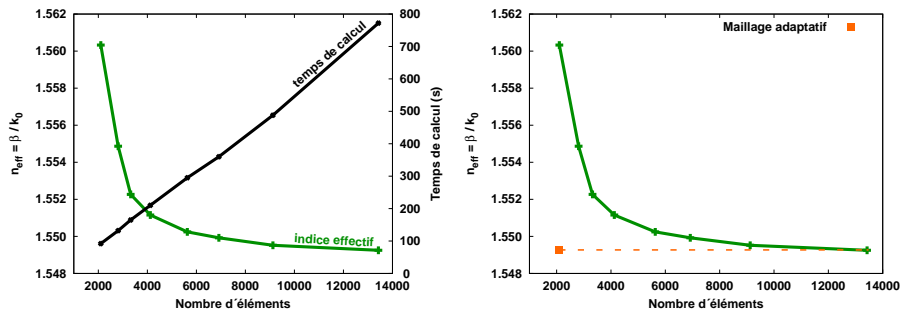
FIGURE 3.9 – Localisation du champ sur un trop faible nombre de triangles dans la fibre à saut d'indice.

Ceci provoque une mauvaise évaluation de la valeur de β et du champ ψ obtenus (figure 3.10). De plus, comme chaque étape d'itération dépend des précédentes, l'erreur est répétée tout au long du processus.

La première possibilité pour résoudre ce problème serait de mailler plus finement toute la fibre mais ceci entraînerait l'obtention d'un nombre important de triangles. La matrice générée serait donc importante et le temps de calcul en serait augmenté en conséquence. La figure 3.10(a) montre l'évolution de l'indice effectif en fonction du nombre d'éléments modélisant la fibre. Nous montrons également

le temps de calcul associé. Celui-ci ne croît pas suivant le cube du nombre d'éléments comme avec les méthodes directes mais linéairement car c'est d'une méthode itérative de résolution qui est utilisée.

Ainsi, pour avoir une valeur précise de l'indice effectif non-linéaire obtenu avec l'algorithme SC_{LinN} , un maillage fin doit être généré ce qui entraîne un temps de calcul important. Ceci est d'autant plus vrai dans le cas de géométries complexes à modéliser et de modes d'ordres supérieurs (champs non centro-symétriques) qui pourraient être étudiés.



(a) Valeurs de l'indice effectif et temps de calcul correspondant suivant le nombre d'éléments utilisés pour la modélisation de la fibre.

(b) Comparaison des indices effectifs obtenus sans et avec l'utilisation du maillage adaptatif

FIGURE 3.10 – Influence du maillage sur l'indice effectif du mode fondamental et intérêt du maillage adaptatif dans l'exemple de la fibre à saut d'indice.

La deuxième possibilité est l'utilisation d'un maillage adaptatif (figure 3.10(b)) qui permet d'obtenir un maillage fin dans les régions de champ fort et un maillage large dans les régions de champ faible[30].

✳ Principe du maillage adaptatif :

À partir d'une représentation du champ (qui est obtenue avec un maillage quelconque), nous définissons une fonction représentant la longueur caractéristique l_c du maillage et dépendant de la valeur du champ à chaque pixel de l'image. Dans notre cas, nous devons créer une fonction telle que plus la valeur du champ est importante, plus la valeur de l_c diminue.

La figure 3.10(b) montre l'effet sur l'indice effectif non-linéaire de l'utilisation du maillage adaptatif. Il suffit de seulement 2000 éléments dans la fibre à saut d'indice considérée pour obtenir une valeur précise de l'indice effectif. Le temps de calcul est par là même considérablement réduit.

L'utilisation du maillage adaptatif dans Gmsh est simple. À partir d'une figure représentant la répartition du champ dans la fibre, nous définissons la fonction

représentant la longueur caractéristique l_c du maillage. Nous remarquons que le maillage est d'autant plus fin que le champ est faible. Or, comme nous venons de l'évoquer, nous voulons au contraire un maillage fin dans les régions où le champ est important.

Les valeurs du champ seront donc définies par la fonction $a|1 - bv_0|^c$ où a, b et c sont des constantes positives à régler suivant la finesse du maillage désirée et v_0 la valeur du champ en un point de l'image.

- Plus le coefficient a est important, plus le maillage est large dans les zones de champ nul (à l'infini).
- Plus le coefficient b est proche de 1.0, plus le maillage est fin dans les zones de champ fort (au centre de la fibre).
- Plus le coefficient c est important, plus le maillage va s'adapter rapidement à la variation du champ.

Cependant, cette technique nécessite d'avoir une carte de champ au préalable pour appliquer un maillage adapté. Or,

- nous observons que dans la boucle non-linéaire le confinement du champ varie peu par rapport au passage linéaire (itération 0) vers non-linéaire (itération 1,...) comme l'illustre l'évolution de la valeur de l'indice effectif (figures 3.7 et 3.8).
- pour optimiser le temps de calcul, nous ne pouvons pas nous permettre un calcul complet avec un maillage fixe pour obtenir le champ final puis en y appliquant un maillage adaptatif, effectuer une deuxième simulation complète avec l'algorithme SC_{LinN} .

Pour ces raisons, nous choisissons donc d'effectuer une itération linéaire préalable pour générer la maillage adaptatif. La technique a deux avantages :

- *situer* la région où le champ sera important dans le cas non-linéaire
- *anticiper* l'affinement du maillage dans la zone de champ fort car ce dernier est issu de l'itération linéaire (itération 0 où le champ est moins confiné). Le maillage sera donc très fin sur toute la zone où il y a le champ issu de la résolution du problème non-linéaire.

La figure 3.11 montre le schéma complet de notre algorithme prenant en compte l'utilisation du maillage adaptatif. Il comprend la résolution linéaire préalable nous permettant d'obtenir la répartition du champ, l'application du maillage adaptatif au champ issu de la résolution linéaire et l'utilisation de l'algorithme SC_{LinN} avec le maillage adapté à la solution recherchée.

La figure 3.12 montre l'effet de l'application du maillage adaptatif pour la modélisation du champ et est à comparer au maillage fixe initialement utilisé (figure 3.9).

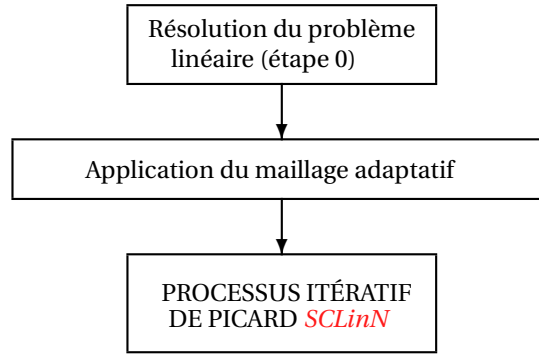


FIGURE 3.11 – Principe de l'utilisation du maillage adaptatif. La résolution du problème linéaire préalable sert à appliquer un maillage adaptatif pour le calcul précis du champ non-linéaire.

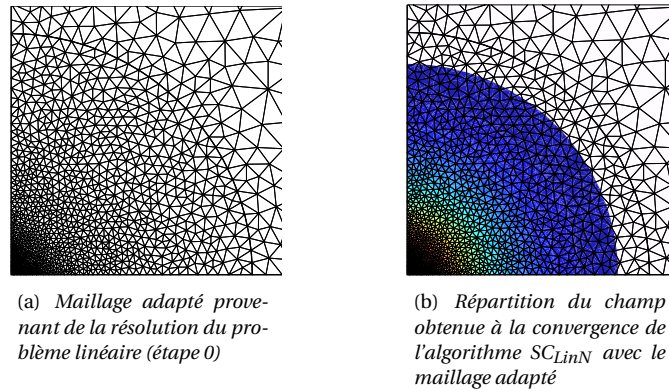


FIGURE 3.12 – L'application du maillage adaptatif dans le cas de la fibre à saut d'indice permet une parfaite modélisation du champ non-linéaire.

Nous pouvons à présent étudier les solutions non-linéaires obtenues à la convergence de l'algorithme SC_{LinN} .

3.4 Vers l'unique solution non-linéaire auto-cohérente

Comme nous l'avons décrit dans la section 2.3.1, le point de départ du processus itératif est le problème linéaire où la valeur de χ_0 est fixée arbitrairement à 1. Cependant, différents tests numériques nous montrent que l'algorithme SC_{LinN} est sensible à

- la valeur de χ_0 choisie

– la forme du champ injecté

à l'étape initiale[23].

Pour étudier ce phénomène, nous effectuons un balayage suivant l'amplitude χ_0 et la forme de la solution injectée lors de l'initialisation du processus itératif.

✪ **Critère de qualité : minimisation du résidu**

Pour évaluer quantitativement la qualité de la solution obtenue à la convergence, nous définissons un critère *a posteriori* : le résidu donné par le membre gauche de l'équation (2.30) est calculé numériquement à la convergence de SC_{LinN} . Nous prenons alors comme fonction de pondération la solution elle-même $\bar{\psi}$ afin de minimiser l'erreur là où le champ est le plus important. Dans ces conditions, le résidu défini ci-dessous tend-il vers zéro ?

$$\int_F \left(\Delta_t \psi_{fin.} + k_0^2 (n_0^2 + |\chi \psi_{fin.}|^2) \psi_{fin.} - \beta_{fin.}^2 \psi_{fin.} \right) \overline{\psi_{fin.}} dS \xrightarrow{?} 0 \quad (3.5)$$

où le couple $(\beta_{fin.}, \psi_{fin.})$ représente la solution non-linéaire obtenue à la convergence de l'algorithme SC_{LinN} . "Tendre vers zéro" signifie que, d'un point de vue numérique, la valeur du résidu atteint la précision machine (10^{-15}).

Les différents tests numériques sont réalisés dans la fibre à saut d'indice pour valider les résultats puis dans la fibre optique microstructurée pour étendre le domaine d'application. De plus, nous allons nous intéresser uniquement à l'étude du "mode non-linéaire" associé au mode fondamental linéaire.

✎ **Remarque 12 :** Comme précédemment expliqué, l'expression "mode non-linéaire" est mise entre guillemets car dans le cas non-linéaire, il ne s'agit pas d'un mode issu de la résolution d'un problème linéaire où le principe de superposition peut être appliqué. Le "Mode fondamental non-linéaire" est en fait la solution non-linéaire obtenue à partir du mode fondamental issu de la résolution du problème linéaire.

3.4.1 Cas linéaire comme point de départ

La première étude consiste à parcourir les valeurs de χ_0 fixées en entrée et à évaluer numériquement le résidu à la convergence (en sortie). Pour cela, nous allons injecter $\chi_0 \psi_0$ à l'étape 1 de l'algorithme SC_{LinN} , ce qui revient à résoudre l'équation

$$\Delta_t \psi_1 + k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} |\chi_0 \psi_0|^2 \right) \psi_1 = \beta_1^2 \psi_1 \quad (3.6)$$

où une valeur de χ_0 est fixée arbitrairement pour chaque simulations et où ψ_0 représente la solution du problème linéaire (solution de l'équation (3.4)).

Ainsi, l'initialisation de l'algorithme SC_{LinN} par une unique valeur $\chi_0 = 1$ est remplacée par un balayage de l'amplitude de la solution issue de la résolution du problème linéaire. Nous appelons ce nouveau processus : l'algorithme SC_{Lin1D} qui nous permettra d'obtenir la solution auto-cohérente (Self-Coherent) à partir d'un balayage de l'amplitude de la solution issue du problème Linéaire ("scan" suivant un seul paramètre (l'amplitude χ_0 de champ ψ_0) donc il s'agit d'un balayage 1D).

La figure 3.13 résume le principe de l'algorithme SC_{Lin1D} . La renormalisation du champ exposée dans la section 2.3.2 est naturellement conservée. Comme nous pouvons le voir, le balayage en amplitude χ_0 est réalisé au niveau de l'étape $i = 0$ après la résolution du problème linéaire. Pour $i = 1$, le problème est linéarisé par l'injection dans le terme non-linéaire des différents champs $\chi_0\psi_0$ issus du balayage en amplitude χ_0 .

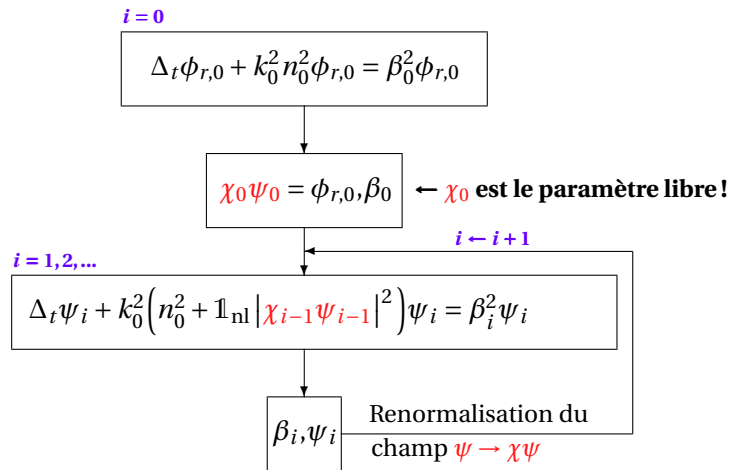


FIGURE 3.13 – Principe de l'algorithme SC_{Lin1D} . Le balayage en amplitude χ_0 est réalisé à l'issue de la résolution du problème linéaire de l'étape $i = 0$.

En pratique, pour réaliser le balayage mono-dimensionnel dans une géométrie donnée, nous procédons comme suit :

- ❶ Nous fixons la longueur d'onde (à travers le vecteur d'onde k_0) : *seul paramètre physique fixé en entrée de notre méthode numérique.*
- ❷ La résolution du problème linéaire est réalisée et nous obtenons le champ ψ_0 non normalisé.
- ❸ Nous fixons une valeur de l'amplitude χ_0 .
- ❹ Le processus itératif SC_{LinN} (figure 2.5) est lancé jusqu'à l'obtention du point fixe (convergence).

- ⑤ Le résidu est calculé à la convergence du processus itératif pour la valeur de l'amplitude χ_0 d'entrée.
- ⑥ Nous recommençons à partir de ③

Au final, nous obtenons une valeur du résidu pour chaque champ $\chi_0 \psi_0$ injecté dans le terme non-linéaire de l'étape 1 de l'algorithme SC_{Lin1D} et nous obtenons la figure 3.14 pour la fibre à saut d'indice et la figure 3.15 pour la FOM.

✓ Dans la fibre optique à saut d'indice

Pour commencer l'étude de l'algorithme SC_{Lin1D} , nous considérons une fibre à saut d'indice constituée d'un cœur de silice de diamètre $2 \mu\text{m}$ présentant un effet non-linéaire de type Kerr optique. La partie linéaire de l'indice de réfraction est $n_{0,\text{guide}} = 1.45$. Le cœur est entouré d'une gaine infinie linéaire dont l'indice de réfraction, respectant l'approximation du guidage faible, est $n_{0,\text{gaine}} = 1.435$. Une condition de Dirichlet homogène est imposée sur le contour de la géométrie.

La figure 3.14 montre qu'à la convergence de l'algorithme SC_{Lin1D} , il existe, pour une configuration donnée (c'est-à-dire pour une fibre et à une longueur d'onde fixée), un minimum de résidu correspondant à une valeur de χ_0 particulière. Un balayage fin aux environs de ce minimum nous permet d'atteindre la précision machine (10^{-15}).

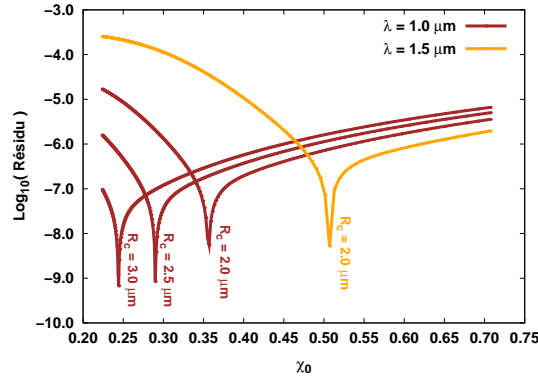


FIGURE 3.14 – Logarithme du résidu obtenu à la convergence de l'algorithme SC_{Lin1D} en fonction de l'amplitude du champ χ_0 pour deux longueurs d'onde différentes et trois fibres à saut d'indice ayant des rayons de cœur R_c différents.

Il existe bien évidemment un deuxième minimum correspondant au problème linéaire pour $\chi_0 = 0$ mais que nous n'avons pas montré par souci de clarté. Pour les autres valeurs de χ_0 , le résidu est nettement supérieur (jusqu'à dix ordres de grandeur) en comparaison de la valeur du minimum.

La présence de ces deux minima prouve numériquement que notre critère de qualité basé sur la minimisation du résidu ne met en évidence que deux “bonnes” solutions vérifiant l'équation (3.4) :

- la solution linéaire correspondant au mode fondamental étudié ici
- une unique solution non-linéaire.

✳ **Définition de la solution non-linéaire auto-cohérente (Partie 2)² :**

L'algorithme SC_{Lin1D} est basé sur la renormalisation du champ par l'intermédiaire du facteur χ défini au paragraphe 2.3.2. L'expression de χ est obtenue par l'annulation d'un résidu pondéré dont l'évaluation numérique *a posteriori* et à la convergence du processus itératif montre un unique minimum. Ceci nous permet donc de différencier la “bonne” solution (vérifiant l'hypothèse d'un résidu nul) des “mauvaises”. Ainsi, pour une fibre donnée et à une longueur d'onde λ fixée, il n'existe qu'une unique solution appelée *solution non-linéaire auto-cohérente* ou *soliton spatial*³. Cette solution est obtenue à la convergence de l'algorithme SC_{Lin1D} et pour le minimum de résidu. Elle est caractérisée par le couple $(\beta_{coh}, \chi_{coh}, \psi_{coh})$ correspondant à la constante de propagation et au champ propre renormalisé.

✓ **Dans la fibre optique microstructurée**

Nous effectuons la même étude pour la fibre optique microstructurée à cœur plein constituée de quatre rangées de trous d'air entourés d'une matrice de silice présentant un effet Kerr optique. La partie linéaire de l'indice de réfraction est égal à 1.45 et le pitch Λ est égal à 6.0 μm .

Comme dans le cas de la fibre à saut d'indice, nous observons le même phénomène lorsqu'un balayage en amplitude de la solution initiale est réalisé (figure 3.15). Il apparaît pour chaque fibre et chaque longueur d'onde étudiée, un unique minimum de résidu (autre que celui correspondant au cas linéaire à $\chi_0 = 0$).

Ainsi, nous venons de mettre en évidence, grâce au balayage en amplitude χ_0 de la solution injectée et de la mise en place d'un critère de qualité basé sur la minimisation du minimum de résidu, la présence d'une unique solution non-linéaire pour une fibre donnée et à une longueur d'onde fixée que nous avons appelée *la solution non-linéaire auto-cohérente* ou *soliton spatial*.

3.4.2 Généralisation du processus itératif

Afin d'assurer et d'étendre la validité et l'unicité de la solution auto-cohérente, nous effectuons un balayage à la fois sur l'amplitude et la forme de la solution injectée à l'itération 1. Pour cela, la solution injectée pour l'initialisation du processus

2. Se reporter à la section 2.3.2 pour la première partie de la définition de la solution non-linéaire auto-cohérente.

3. Le soliton spatial est à différencier du soliton temporel [6] présenté dans l'introduction générale.

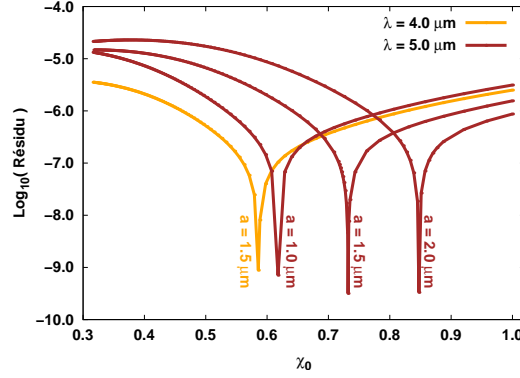


FIGURE 3.15 – Logarithme du résidu obtenu à la convergence de l'algorithme SC_{Lin1D} en fonction de l'amplitude du champ χ_0 pour deux longueurs d'onde différentes et trois FOMs ayant des trous d'air de tailles différentes.

n'est plus la solution issue de la résolution du problème linéaire, mais une fonction gaussienne. Ce choix se justifie par la relative ressemblance entre la solution issue du problème linéaire et une gaussienne.

Dans ce cas, nous injectons à l'étape 1 du processus itératif la fonction

$$\chi_0 e^{-r^2/2\sigma_0^2} \quad (3.7)$$

où χ_0 est l'amplitude, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et σ_0 l'écart-type. Ainsi, l'initialisation de l'algorithme SC_{Lin1D} est remplacé par un balayage "bi-dimensionnel" sur l'amplitude χ_0 et la largeur σ_0 de la solution injectée.

Nous appelons ce nouvel algorithme $SC_{Gauss2D}$ permettant de trouver des solutions auto-cohérentes (Self-Coherent) à partir d'une fonction Gaussienne en effectuant un balayage 2D des paramètres la caractérisant. Le principe de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ est donné par la figure 3.16. Celui-ci est à comparer avec la figure 3.13 de l'algorithme SC_{Lin1D} . À l'étape 1, nous injectons ainsi la fonction gaussienne où les deux balayages sont réalisés : l'amplitude χ_0 et l'écart-type σ_0 (repérés en bleu sur la figure 3.16).

Pour chaque fonction gaussienne injectée dans le terme non-linéaire à l'étape 1, nous calculons le résidu à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ donné par l'équation (3.5).

En pratique, pour réaliser le balayage bi-dimensionnel dans une géométrie donnée nous procédons comme suit :

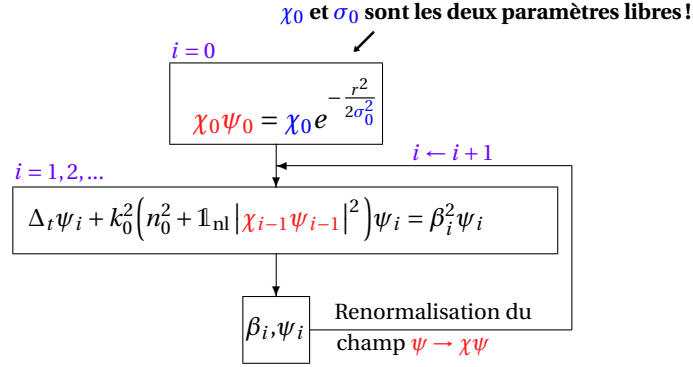


FIGURE 3.16 – Principe de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$. Le balayage 2D est réalisé à la fois sur l'amplitude χ_0 et l'écart-type σ_0 de la fonction gaussienne injectée dans le terme non-linéaire de l'étape 1.

- ❶ Nous fixons la longueur d'onde (dans k_0) : *seul paramètre physique fixé en entrée de notre méthode numérique.*
- ❷ Une valeur de σ_0 est choisie telle que $\sigma_0 \geq \sigma_{lin}$: valeur de l'écart-type obtenue par le fit gaussien de la solution issue du problème linéaire dans la même configuration.
- ❸ Le balayage mono-dimensionnel suivant l'amplitude χ_0 est effectué comme dans cas de l'algorithme SC_{Lin1D} (section 3.4.1).
- ❹ Pour chaque couple (σ_0, χ_0) , le résidu est calculé à la convergence du processus itératif (calcul *a posteriori*).
- ❺ Nous recommençons à partir du point ❷

Au final, nous obtenons une valeur du résidu pour chaque champ (σ_0, χ_0) injecté dans le terme non-linéaire de l'étape 1 de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ et nous obtenons la figure 3.17 pour la fibre à saut d'indice et la figure 3.21 pour la FOM.

✓ Dans la fibre optique à saut d'indice

Comme dans la section 3.4.1 précédente, nous étudions dans un premier temps la fibre à saut d'indice pour faciliter la compréhension des phénomènes mis en jeu. Il s'agit de la même fibre ayant un cœur de silice non-linéaire de rayon $R_c = 2 \mu m$ et respectant l'approximation du guidage faible dans le cas linéaire.

La figure 3.17 montre l'évolution du résidu (suivant un code couleur) en fonction des fonctions gaussiennes (caractérisées par la couple (σ_0, χ_0)) injectées en entrée de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$. Nous observons une étroite vallée où le résidu est minimum (région claire). Un balayage fin en amplitude dans cette région permet d'atteindre des résidus de 10^{-15} soit plus de dix ordres de grandeur entre un résidu

minimum et un résidu quelconque (correspond à une solution non-linéaire ne vérifiant l'équation (3.4)).

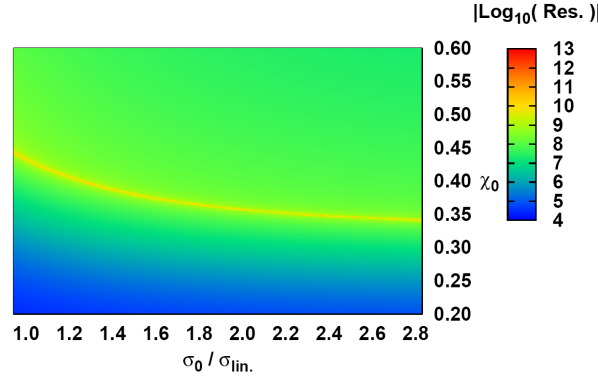


FIGURE 3.17 – Carte de la valeur absolue du logarithme du résidu calculé à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ pour une fibre à saut d'indice ($R_c = 2.0 \mu m$, $\lambda = 1.0 \mu m$) en fonction des caractéristiques $(\sigma_0/\sigma_{lin}, \chi_0)$ de la fonction gaussienne (3.7) injectée en entrée du processus. La valeur de σ_0 est normalisée par la valeur σ_{lin} définie dans le point ②.

Ceci signifie qu'à chaque valeur de σ_0 , il n'existe qu'une unique valeur de χ_0 telle que le résidu est minimum. Notons que le balayage en amplitude χ_0 réalisé par l'algorithme SC_{Lin1D} est représenté sur une ligne verticale d'abscisse $\sigma_0/\sigma_{lin} = 1$ en supposant que la solution issue de la résolution du problème linéaire est un profil gaussien.

★ Point clé :

La figure 3.17 suggère qu'il existe un continuum de solutions correspondant à l'ensemble des solutions obtenues à la convergence et pour un résidu minimum. En effet, les résultats montrés à cet instant nous donne uniquement les caractéristiques de la solution injectée pour l'initialisation de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ et pour obtenir un résidu minimum. Une question se pose alors : les solutions obtenues pour ces minima (contenant également l'unique solution obtenue avec l'algorithme SC_{Lin1D}) correspondent-elles finalement qu'à une même et unique solution à λ fixée ?

Pour répondre à cette question, nous devons étudier les caractéristiques finales (amplitude notée $\chi_{fin.}$ et écart type $\sigma_{fin.}$) des solutions non-linéaires obtenues à la convergence (figure 3.18).

☛ **Approximation :** Bien qu'une gaussienne soit injectée en entrée du processus, les solutions finales ne sont pas des gaussiennes. Cependant, un excellent

ajustement gaussien est possible afin de pouvoir étudier et comparer quantitativement les caractéristiques de ces solutions.

La figure 3.18 montre la valeur absolue du logarithme du résidu en fonction des valeurs $(\chi_{fin.}, \sigma_{fin.})$ caractérisant la solution auto-cohérente obtenue à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$.

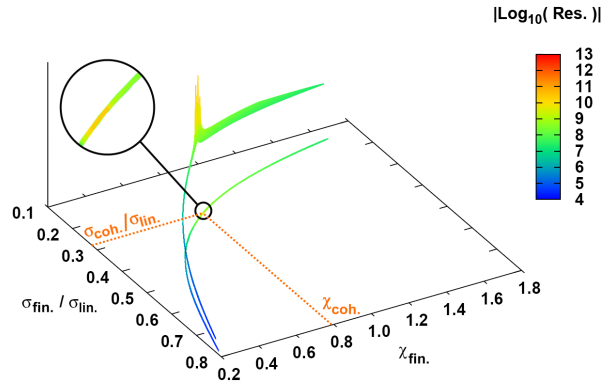


FIGURE 3.18 – Carte du résidu obtenue à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ en fonction des caractéristiques finales $(\sigma_{fin.}/\sigma_{lin.}, \chi_{fin.})$ de la solution non-linéaire dans la fibre à saut d'indice. Par soucis de clarté, la représentation de la courbe en 3D est accompagnée de sa vue de dessus avec un zoom dans la région du résidu minimum au niveau de la solution non-linéaire auto-cohérente $(\sigma_{coh.}/\sigma_{lin.}, \chi_{coh.})$.

Nous remarquons que l'ensemble des couples $(\sigma_{fin.}, \chi_{fin.})$ est localisé sur une fine bande alors que les paramètres d'entrée (σ_0, χ_0) formaient une carte complète (figure 3.17). De plus, les solutions non-linéaires obtenues à la convergence et présentant un minimum de résidu forment un "pic de résidu". Ceci signifie que l'ensemble des gaussiennes conduisant à un résidu minimum correspondent, à la convergence, à une unique solution non-linéaire caractérisée par une valeur de σ particulière notée $\sigma_{coh.}$ et une amplitude particulière notée $\chi_{coh.}$. Ceci tend à suggérer la présence d'une unique solution non-linéaire auto-cohérente définie par le couple $(\beta_{coh.}, \chi_{coh.}, \psi_{coh.})$.

Pour confirmer cette première observation qualitative, une étude quantitative est réalisée (figure 3.19 et tableau 3.3). Pour cela, les deux paramètres caractérisant la solution sont analysés :

- l'indice effectif $n_{eff} = \beta/k_0$ comprenant la valeur propre β (voir la figure 3.19 et le tableau 3.3)
- le vecteur propre associé ψ correspondant au champ dans la fibre optique (voir le tableau 3.3). Pour ce dernier, les intégrales suivantes sont calculées.

$$P_0 = \int_F |\chi_0 \psi_0|^2 dS \quad (3.8)$$

caractérise le champ injecté en entrée de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ et

$$P_{coh.} = \int_F |\chi_{coh.} \psi_{coh.}|^2 dS \quad (3.9)$$

caractérise le champ obtenu à la convergence et pour le minimum de résidu.

La figure 3.19 montre que sur la large plage de paramètres balayés, l'écart relatif $\Delta_{coh.}$ représentant la variation relative maximale des intégrales du champ des différentes solutions auto-cohérentes est négligeable ($\Delta_{coh.} = 0.001$) devant celui des fonctions gaussiennes injectées ($\Delta_0 = 4.35$). En d'autres termes, la champ obtenu à la convergence et pour le minimum de résidu est quasiment le même quelle que soit la fonction gaussienne injectée en entrée (figure 3.19).

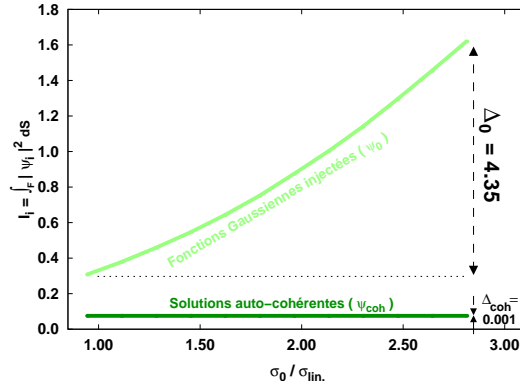


FIGURE 3.19 – Comparaison des grandeurs P_0 et $P_{coh.}$ caractérisant le champ initial et le champ final obtenus avec $SC_{Gauss2D}$ à la convergence et pour le minimum de résidu en fonction de l'écart-type σ_0 de la gaussienne injectée pour la fibre à saut d'indice. Δ_0 et $\Delta_{coh.}$ représentent respectivement l'écart relatif entre les deux valeurs extrémales de P_0 et $P_{coh.}$.

Une étude plus précise peut être réalisée concernant les valeurs numériques obtenues à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ et pour le minimum de résidu. Le tableau 3.3 donne les valeurs des paramètres finaux caractérisant la solution non-linéaire auto-cohérente :

- l'écart-type $\sigma_{coh.}$
- l'amplitude $\chi_{coh.}$
- l'indice effectif n_{eff} représentant la valeur propre $\beta_{coh.}$

- $P_{coh.}$ représentant l'intégrale du champ associé à la valeur propre.

Nous étudions les valeurs extrémales de σ_0 injectées en entrée du processus itératif. Les valeurs de $\sigma_{coh.}$ ($< \sigma_0$) confirment que la solution auto-cohérente est plus localisée au centre de la fibre optique. Par ailleurs, nous remarquons que l'effet non-linéaire est d'autant plus important que les champs injectés en entrée de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ (fonctions gaussiennes) sont étalés dans la structure. Concernant l'amplitude $\chi_{coh.}$ de la solution, l'effet inverse se produit par rapport à l'évolution de $\sigma_{coh.}$.

Au final, les valeurs de l'indice effectif et du champ caractérisant la solution non-linéaire auto-cohérente sont quasi-identiques (à 0.1%) en comparaison de la grande plage des valeurs des paramètres injectés.

	$\sigma_{coh.}/\sigma_{lin}$	$\chi_{coh.}$	n_{eff}	$P_{coh.}$
$\sigma_0/\sigma_{lin} = 0.9$	0.267168	0.790708	1.493216167	0.075204
$\sigma_0/\sigma_{lin} = 2.8$	0.283081	0.745595	1.488355467	0.075101
$\Delta_{coh.}$			0.003265819	0.001371

TABLE 3.3 – *Caractéristiques finales de la solution non-linéaire auto-cohérente en fonction des deux valeurs extrémales des fonctions gaussiennes injectées en entrée du processus $SC_{Gauss2D}$ dans la fibre à saut d'indice. $\Delta_{coh.}$ représente l'écart relatif entre deux valeurs extrémales de $P_{coh.}$.*

Ainsi, les études qualitatives puis quantitatives nous montre qu'il existe une *unique solution non-linéaire auto-cohérente pour une géométrie donnée à une longueur d'onde fixée.*

Enfin, la figure 3.20 montre la répartition du champ dans la fibre à saut d'indice pour deux fonctions gaussiennes d'écart-types différents (figures 3.20(a) et 3.20(b)). Comme l'indiquait les études qualitative et quantitative, la répartition du champ dans la fibre à la convergence et pour le minimum de résidu est la même quelle que soit la fonction gaussienne d'entrée (figures 3.20(c) et 3.20(d)). Le champ correspondant à la solution non-linéaire auto-cohérente est confiné dans le cœur non-linéaire de la fibre à saut d'indice.

✓ Dans la fibre optique microstructurée

Pour étendre la validité des résultats obtenus dans la fibre à saut d'indice, nous étudions l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ dans une fibre optique microstructurée composée de trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 1.5 \mu\text{m}$ et de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$. La même étude est réalisée sur la valeur du résidu obtenue à la convergence de l'algorithme suivant différentes fonctions gaussiennes injectées (figure 3.21) et suivant les solutions finales obtenues (figure 3.22).

La figure 3.21 montre, comme pour la fibre à saut d'indice, une étroite vallée pour laquelle le résidu est minimum (couleur claire). Ce minimum est particulièrement marqué et peut atteindre 10^{-15} si un balayage fin autour de la zone minimale

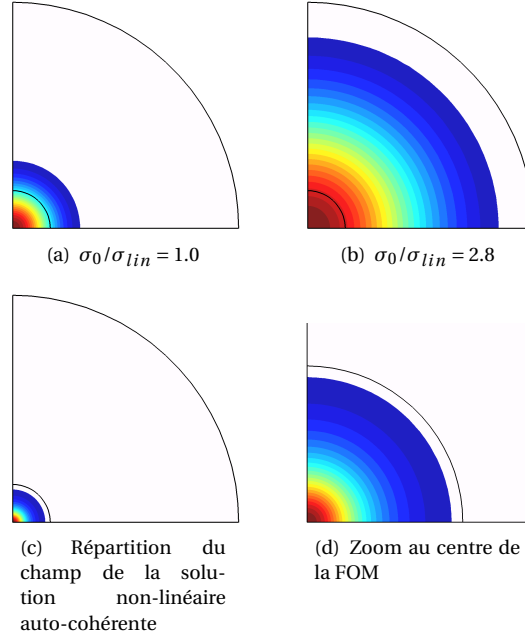


FIGURE 3.20 – Répartition du champ pour la fibre à saut d'indice ($R_c = 2.0 \mu m$) à $\lambda = 1.5 \mu m$ pour deux fonctions gaussiennes ((a) and (b)) et pour le soliton spatial correspondant au mode fondamental ((c) and (d)).

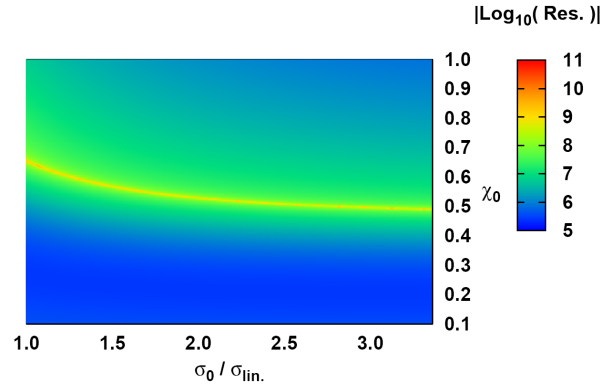


FIGURE 3.21 – Carte de la valeur absolue du logarithme du résidu calculée à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ en fonction des caractéristiques ($\sigma_0/\sigma_{lin.}$, χ_0) de la fonction gaussienne injectée en entrée du processus pour une FOM de trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 1.5 \mu m$, de pitch $\Lambda = 5.0 \mu m$ et pour $\lambda = 4.0 \mu m$.

est effectuée. Ainsi, dix ordres de grandeurs peuvent séparer un résidu quelconque d'un résidu minimum.

À chaque valeur de σ_0 correspond une unique amplitude χ_0 tel que le résidu est minimum à la convergence du processus. Mais nous pouvons nous demander si les différentes fonctions gaussiennes injectées en entrée de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ et correspondant à un résidu minimum représentent une unique solution. L'étude des paramètres finaux ($\sigma_{fin.}, \chi_{fin.}$) des solutions obtenues à la convergence est donc réalisée (figure 3.22).

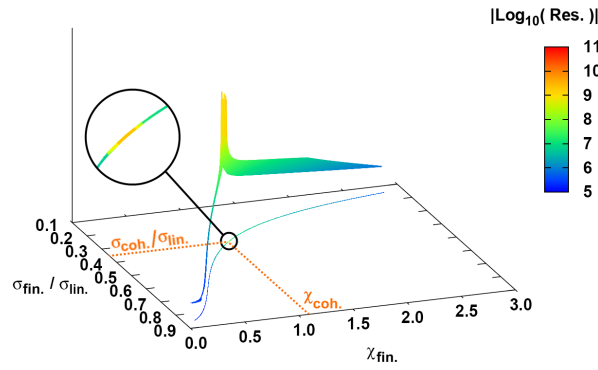


FIGURE 3.22 – Carte de la valeur absolue du logarithme du résidu calculé à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ en fonction des caractéristiques finales ($\sigma_{fin.}/\sigma_{lin.}, \chi_{fin.}$) de la solution non-linéaire pour la FOM décrite dans cette section. Par soucis de clarté, la représentation de la courbe en 3D est accompagnée de sa vue de dessus avec un zoom dans la région du résidu minimum au niveau de la solution non-linéaire auto-cohérente ($\sigma_{coh.}/\sigma_{lin.}, \chi_{coh.}$).

Comme dans le cas de la fibre à saut d'indice, nous remarquons que les couples ($\sigma_{fin.}, \chi_{fin.}$) forment une fine courbe à la différence des paramètres initiaux (σ_0, χ_0). De plus, les solutions non-linéaires obtenues à la convergence et présentant un minimum de résidu forment un "pic de résidu". Ceci signifie que l'ensemble des gaussiennes conduisant à un résidu minimum correspondent, à la convergence, à une unique solution non-linéaire caractérisée par une valeur de σ particulière notée $\sigma_{coh.}$ et une amplitude particulière notée $\chi_{coh.}$.

Ceci tant à suggérer la présence d'une unique solution non-linéaire dite auto-cohérente et définie par le couple ($\beta_{coh.}, \chi_{coh.}, \psi_{coh.}$).

Pour confirmer cette première observation qualitative, une étude quantitative est réalisée. Pour cela, les intégrales P_0 et $P_{coh.}$ sont calculées. Nous remarquons que sur la large plage de paramètres balayés, l'écart relatif maximal $\Delta_{coh.}$ de l'intégrale du champ des différentes solutions auto-cohérentes est négligeable devant

celui des fonctions gaussiennes injectées Δ_0 (figure 3.23). En effet, trois ordres de grandeur séparent les deux quantités.

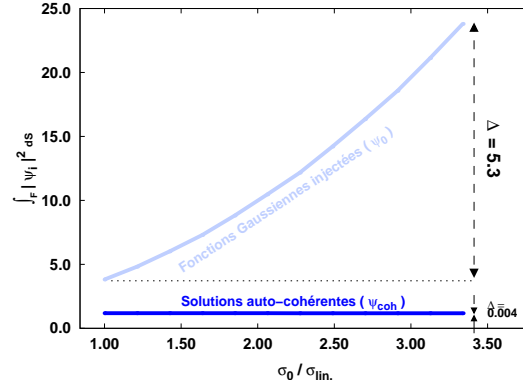


FIGURE 3.23 – Comparaison des grandeurs P_0 et $P_{coh.}$ représentant la répartition du champ respectivement en entrée et en sortie de $SC_{Gauss2D}$ pour le minimum de résidu dans la FOM décrite dans cette section. Δ_0 et $\Delta_{coh.}$ correspondent respectivement à l'écart relatif entre deux valeurs extrémales de P_0 et $P_{coh.}$.

Le tableau 3.4 donne les paramètres en sortie ($\sigma_{coh.}, \chi_{coh.}$) obtenus pour les valeurs extrémales de σ_0 utilisées en entrée de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$. Nous observons les mêmes phénomènes que pour la fibre à saut d'indice.

- L'écart-type de la fonction gaussienne injectée montre que plus le champ initial est étalé dans la fibre, plus l'effet non-linéaire est important.
- L'évolution de l'amplitude $\chi_{coh.}$ de la solution auto-cohérente est inverse de celle de $\sigma_{coh.}$.
- Ceci explique que les caractéristiques de la solution non-linéaire ($\beta_{coh.}, \psi_{coh.}$) représentées respectivement par l'indice effectif n_{eff} et l'intégrale du champ au carré ont chacune des valeurs extrémales quasi-identiques. En effet, nous remarquons que l'écart relatif $\Delta_{coh.}$ représentant la variation relative maximale de l'indice effectif sur l'ensemble de la plage de paramètres étudiés excède à peine 0.7% tandis que celle de l'intégrale 0.4%.

La dernière étude concerne la répartition du champ dans la FOM (figure 3.24). Deux fonctions gaussiennes avec deux écart-types différents sont injectées en entrée de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ (figures 3.24(a) et 3.24(b)). Comme les études précédentes le laissaient supposer, le champ obtenu à la convergence et pour le résidu minimum (figure 3.24(c)) est strictement le même quelle que soit la gaussienne injectée. L'essentiel du champ est localisé au cœur de la FOM avec une influence des inclusions d'air. Nous étudierons dans la suite le rôle de la structure de la fibre op-

	$\sigma_{coh.}/\sigma_{lin.}$	$\chi_{coh.}$	n_{eff}	$P_{coh.}$
$\sigma_0/\sigma_{lin.} = 1.0$	0.341157	1.093214	2.406707233	1.184251
$\sigma_0/\sigma_{lin.} = 3.4$	0.367183	1.013772	2.388756658	1.179239
$\Delta_{coh.}$			0.007514610	0.004250

TABLE 3.4 – Caractéristiques finales de la solution non-linéaire auto-cohérente en fonction des deux valeurs extrémales des fonctions gaussiennes injectées en entrée du processus $SC_{Gauss2D}$ dans la FOM de trois rangées d'inclusions d'air ($a = 1.5 \mu m$, $\Lambda = 6.0 \mu m$). $\Delta_{coh.}$ représente l'écart relatif entre deux valeurs extrémales de $P_{coh.}$.

tique microstructurée ainsi que de la fibre à saut d'indice (section 4.2.2).

✎ **Remarque 13 :** Sachant que le champ est négligeable dans les trous d'air, la fonction gaussienne injectée initialement dans la FOM (figures 3.24(a) et 3.24(b)) est nulle dans les inclusions pour éviter de perturber le système.

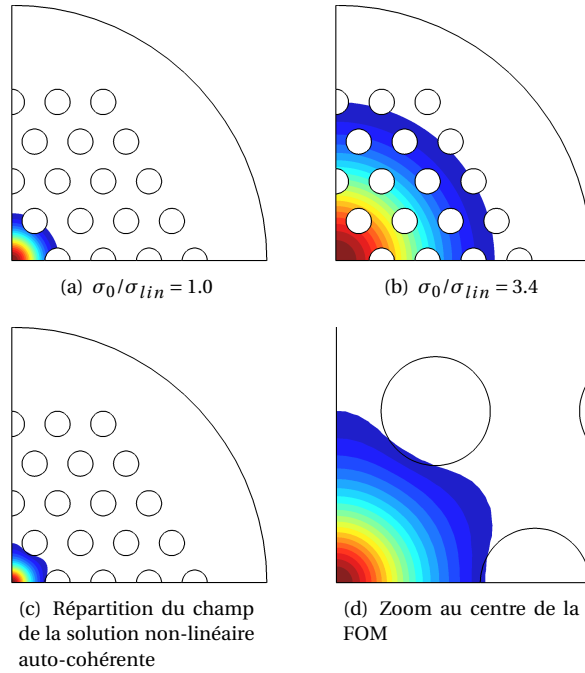


FIGURE 3.24 – Répartition du champ dans la fibre optique microstructurée à $\lambda = 5.0 \mu m$ pour deux fonctions gaussienne ((a) et (b)) et pour le soliton spatial ((c) et (d)).

✪ **Une unique solution non-linéaire auto-cohérente ou soliton spatial :**

L'étude des deux algorithmes SC_{Lin1D} et $SC_{Gauss2D}$ nous a permis de mettre en évidence une unique solution non-linéaire auto-cohérente pour une longueur d'onde fixée et dans une géométrie donnée. La solution de SC_{Lin1D} est en outre la même que celle obtenue par l'algorithme $SC_{Gauss2D}$. Nous choisissons dès lors d'utiliser l'algorithme SC_{Lin1D} dans la suite car, d'un point de vue physique, son étude est plus cohérente dans le cadre d'une analyse en longueur d'onde. En effet, partant de la solution issue du problème linéaire, l'algorithme SC_{Lin1D} est initialisé par une solution physique et non une fonction dont la forme est arbitrairement choisie. Enfin, l'utilisation de l'algorithme SC_{Lin1D} est beaucoup plus rapide puisqu'il met en jeu un balayage mono-dimensionnel.

Comme nous l'avons montré dans les sections 3.4.1 et 3.4.2, il existe un unique minimum de résidu déterminé au terme d'un balayage régulier selon l'amplitude (algorithme SC_{Lin1D}) ou selon l'amplitude et la forme (algorithme $SC_{Gauss2D}$) de la solution initiale. Cependant, pour atteindre un résidu égal à la précision machine (10^{-15}) un balayage très fin donc très coûteux en temps de calcul doit être réalisé.

Pour nous affranchir de cette contrainte, nous avons choisi d'utiliser une routine permettant la recherche d'un minimum d'une fonction. Il s'agit d'un procédé basé sur la *recherche par section du nombre d'or* dont une description complète peut-être consultée dans la référence [11]. Le principe général est présenté par la figure 3.25. Dans cet exemple, la courbe montre l'évolution du résidu suivant l'amplitude χ_0 de la solution issue du problème linéaire. Chaque point de la courbe correspond à un résidu obtenu à la convergence de l'algorithme SC_{Lin1D} . Bien entendu, au départ nous n'avons que les points ① et ②. L'ensemble de la courbe est obtenu au fur et à mesure de la recherche du minimum.

Grâce à cette technique, le minimum de résidu est obtenu plus rapidement et plus précisément dans le cadre d'une recherche mono-dimensionnelle selon l'amplitude (cas de l'algorithme SC_{Lin1D}).

Ainsi, pour l'étude des propriétés physiques de la solution non-linéaire auto-cohérente, nous utiliserons une méthode numérique que nous avons imaginée, développée, mise au point et optimisée. Cette nouvelle méthode comprend :

- ✓ l'algorithme SC_{Lin1D} résumé par la figure 3.13
- ✓ le maillage adaptatif (section 3.3.2)
- ✓ le critère de qualité basé sur la minimisation du résidu (équation (3.5))
- ✓ la recherche du minimum de résidu optimisé par la recherche par section du nombre d'or.

Nous appelons cette méthode numérique optimisée par le nombre d'or (**Gold**) :

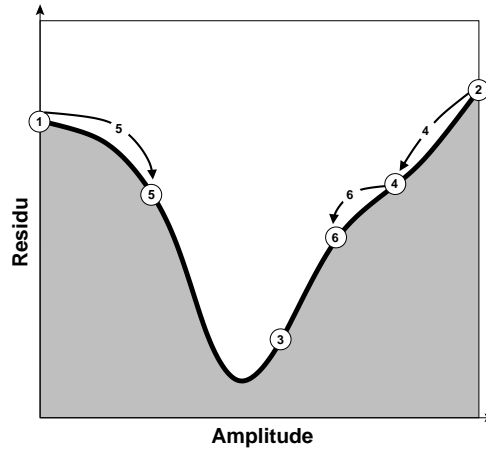


FIGURE 3.25 – Principe de la recherche par section du nombre d'or et intervalles successifs permettant la détection du minimum de résidu. Le minimum est initialement compris entre les points 1 et 2. Un point 3 est choisi entre 1 et 2. Le résidu est évalué au point 4 qui remplace 2, puis au 5 qui remplace 1 et ensuite au 6 qui remplace le point 4.

l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$.

Ainsi, si nous considérons une FOM avec 3 rangées de trous d'air entourées d'une matrice de silice d'indice de réfraction linéaire égal à 1.45, de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$ séparant les inclusions d'air de rayon $a = 1.5 \mu\text{m}$ et à $\lambda = 6.0 \mu\text{m}$, alors la solution non-linéaire auto-cohérente, résultat de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ et provenant de la solution linéaire (figure 3.26(a)), est représentée par la figure 3.26(b).

Pour cette configuration, l'indice effectif de la solution issue du problème linéaire est $n_{eff} = 1.40706$. Dans ce cas, le soliton spatial obtenu à la convergence de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ et pour le minimum de résidu est : $n_{eff} = 1.58546$.

Si nous revenons à la figure 3.4(a), nous vérifions que pour obtenir le mode fondamental dans le cas scalaire il suffit bien d'appliquer sur le bord (3) une condition de Dirichlet explicite (champ nul) et une condition de Neumann (dérivée du champ nulle) sur les bords (1) et (2).

Conclusion

NOUS AVONS ÉTUDIÉ DANS CE CHAPITRE, la méthode numérique permettant de mettre en évidence une unique solution non-linéaire auto-cohérente. La première étude consistait à valider la Méthode des Éléments Finis que nous avons utilisée dans le cas de l'approximation scalaire et en l'absence d'effet non-linéaire.

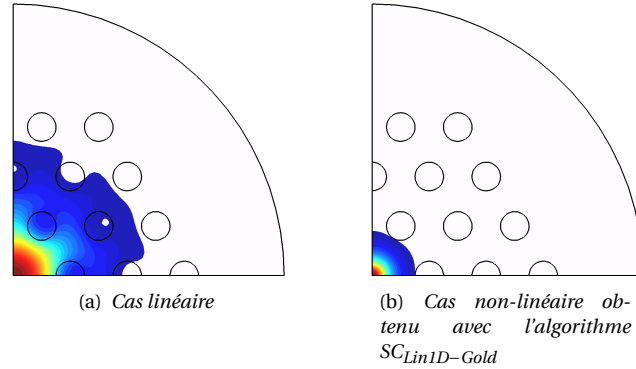


FIGURE 3.26 – Répartition spatiale du champ dans la dimension transverse de la FOM pour la solution issue du problème linéaire (a) et pour la solution non-linéaire auto-cohérente (b) obtenue à la convergence de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ et pour le minimum de résidu.

Pour cela des comparaisons avec d'autres méthodes numériques comme la Méthode Multipolaire ou la méthode FFF-MS ont été réalisées.

La deuxième étude concernait la mise en place de l'algorithme auto-cohérent et l'étude de sa convergence. Nous avons dans cette perspective mis en place une procédure de maillage adaptatif permettant non seulement d'améliorer sensiblement la précision des calculs numériques mais aussi d'accélérer la résolution du problème non-linéaire.

Les différentes études des solutions obtenues nous ont permis d'améliorer l'algorithme SC_{LinN} initialement défini dans la section 2.3.2. Dans cette perspective, l'influence de la solution initiale a été étudiée. Dans un premier temps, nous avons injecté la solution provenant du problème linéaire : l'algorithme SC_{Lin1D} . Dans un deuxième temps, nous avons modifié l'initialisation de ce processus itératif en injectant différentes fonctions gaussiennes : l'algorithme $SC_{Gauss2D}$. Pour sélectionner les solutions d'intéressantes, nous avons défini un critère de qualité basé sur la minimisation d'un résidu. Une optimisation de la recherche du minimum a été réalisée en utilisant une méthode basée sur le recherche par section du nombre d'or.

Ceci nous a permis de mettre en évidence qualitativement puis quantitativement l'unicité, du point de vue numérique et à une longueur d'onde, de la solution non-linéaire obtenue à la convergence du processus, au minimum de résidu et ce dans les deux types de fibres optiques étudiées. Mais quelle est la signification physique de la solution non-linéaire auto-cohérente ?

Chapitre

4

Au-delà du Soliton de Townes

Introduction

NOUS AVONS MONTRÉ que pour une structure donnée et à une longueur d'onde fixée, la solution du problème non-linéaire était unique (d'un point de vue numérique) suivant le critère de qualité que nous avons défini. Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés physiques de cette solution. Tous d'abord, nous comparerons la solution obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ que nous proposons avec les solutions non-linéaires obtenues par une approche différente publiée notamment dans les références [25, 26, 28]. Ceci nous permettra de vérifier la validité de la solution non-linéaire auto-cohérente (ou soliton spatial) et de connaître sa signification physique. Nous montrerons que le soliton spatial est la solution de plus haute puissance avant l'autofocalisation instable. Puis, nous analyserons les propriétés opto-géométriques de celui-ci avec en particulier, l'étude de l'influence de la longueur d'onde et de la structure transverse de la fibre optique à saut d'indice ou microstructurée. Enfin, nous montrerons que la solution non-linéaire auto-cohérente mise en évidence par notre méthode numérique correspond dans le milieu homogène non-linéaire au soliton de Townes défini dans les années soixante. Dans cette perspective, nous caractériserons ce soliton de Townes à l'aide d'une méthode totalement différente de notre approche. Ceci nous permettra de généraliser le soliton de Townes dans les fibres optiques en montrant que non seulement l'effet de la structuration est importante mais aussi que la prise en compte de la constante de propagation est nécessaire. Nous prouvons donc numériquement que le soliton spatial dépend de la fibre optique et de la longueur d'onde d'étude et que le soliton de Townes est le cas limite aux faibles longueurs d'onde du soliton spatial.

4.1 Signification physique de la solution non-linéaire auto-cohérente

Pour étudier la signification physique de la solution auto-cohérente déterminée avec les algorithmes SC_{Lin1D} et $SC_{Gauss2D}$, nous allons la comparer avec les solutions obtenues à partir d'une approche différente : l'*algorithme à puissance fixée* [25, 26]. Nous appelons cet algorithme : FP_{Fer} pour la recherche de solutions à puissance fixée (Fixed Power) proposée par Albert Ferrando.

4.1.1 L'algorithme à puissance fixée

Un des intérêts de l'algorithme SC_{Lin1D} que nous proposons est sa modularité. En effet, nous pouvons facilement transformer l'algorithme SC_{Lin1D} pour implémenter l'algorithme FP_{Fer} . Il suffit simplement de modifier l'expression de χ_i déterminée avec l'équation (2.34) par

$$\chi_i^2 = \frac{n_{Kerr}^2 P}{\int_F |\psi_i|^2 dS} \quad (4.1)$$

où P représente la valeur de la puissance physique (en watt), fixée en entrée du processus itératif et F le domaine d'intégration sur *toute* la dimension transverse de la fibre.

✎ **Remarque importante 14 :** Notons ici que le coefficient n_{Kerr}^2 s'exprime en $m^2.W^{-1}$ (voir l'équation (1.20)). Pour cette approche, la puissance physique P est une valeur arbitraire que nous fixons en entrée de la méthode itérative et qui reste constante tout au long du processus.

Pour implémenter cet algorithme à puissance fixée (Fixed Power), nous utilisons la Méthode des Éléments Finis. Nous appelons cet l'algorithme : FP_{FEM} dont le principe est résumé par la figure 4.1.

✎ **Remarque 15 :** Pour obtenir l'algorithme FP_{FEM} , nous modifions l'algorithme SC_{Lin1D} mais pas l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ car nous ne recherchons pas ici la solution non-linéaire auto-cohérente de résidu minimum.

Comme nous pouvons l'observer, la seule différence avec l'algorithme SC_{Lin1D} est le coefficient de renormalisation du champ où la valeur de P est entrée par l'utilisateur. De plus, la renormalisation concerne également la solution initiale (pas de paramètre d'amplitude libre en entrée) car χ_i n'est fonction que du champ de l'étape i et non des champs des étapes i et $i-1$ (ce qui était le cas pour l'algorithme auto-cohérent). Aucun balayage n'est donc utile ici.

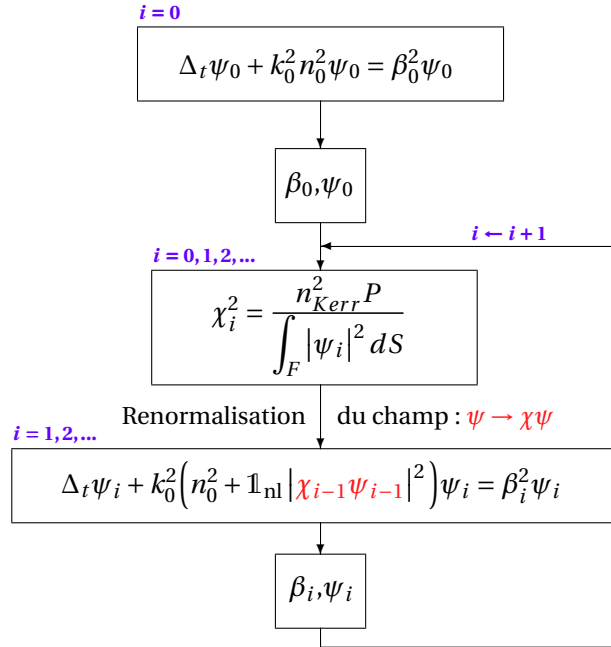


FIGURE 4.1 – Principe de l'algorithme FP_{FEM} . La puissance P est fixée *a priori* en entrée du processus non-linéaire.

Ainsi, contrairement à notre algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ (ou SC_{Lin1D}) dans lequel la puissance est déterminée *a posteriori* (*i.e.* à la convergence du processus et au minimum de résidu), l'algorithme FP_{Fer} fixe *a priori* la puissance et ce, tout au long de l'algorithme. Dans ce cas, le processus itératif est "guidé" vers la solution (β, ψ) par la puissance imposée en entrée.

✳ **Point clé :**

L'algorithme FP_{Fer} consiste à fixer en entrée la puissance désirée en sortie et à déterminer à une longueur d'onde λ donnée et pour un mode souhaité la valeur de la constante de propagation β et le champ ψ associé. Au contraire, l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ permet de trouver, pour une configuration donnée, la valeur de β et le champ ψ associé sans orienter en entrée la direction de recherche. Ce n'est qu'*a posteriori* que la solution est obtenue par l'intermédiaire du calcul du résidu, critère de qualité permettant d'isoler l'unique bonne solution auto-cohérente.

Dans un premier temps, nous allons comparer les algorithmes FP_{Fer} et FP_{FEM} dans le but de valider l'approche numérique utilisée. En effet, dans le cas de l'algorithme FP_{Fer} , ce n'est pas une fibre optique microstructurée de taille finie qui est considérée mais une structure périodique constituée par des cellules élémentaires (FIG. 4.2).

Elles présentent chacune un nombre fini de trous d'air équidistants et un défaut central constitué par l'omission d'une inclusion. La modélisation de la cellule élémentaire permet d'implémenter les conditions aux limites périodiques [25].

La structure est donc différente de celle que nous utilisons pour l'implémentation des algorithmes FP_{FEM} et $SC_{Lin1D-Gold}$ dans les cas des FOMs à cœur plein. Par ailleurs, la méthode numérique utilisée pour l'algorithme FP_{Fer} n'est pas la Méthode des Éléments Finis.

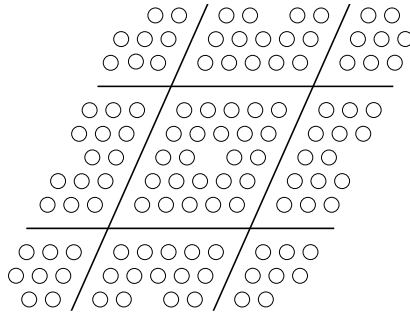


FIGURE 4.2 – Cellule élémentaire de forme rhomboïde (losange) utilisée pour l'implémentation des conditions aux limites périodiques de l'algorithme FP_{Fer} et entourée de six autres partiellement représentées.

Cette étude se révèle donc nécessaire et va nous permettre de :

- valider l'algorithme à puissance fixée (FP_{FEM}) par la Méthode des Éléments Finis
- comparer les approches auto-cohérente (algorithme SC_{Lin1D}) et à puissance fixée (algorithme FP_{FEM})
- vérifier la validité de la solution non-linéaire auto-cohérente
- comprendre sa signification physique.

4.1.2 Validation de l'algorithme à puissance fixée par la MEF

Comme évoqué précédemment, notre étude s'inscrit dans une démarche pas-à-pas afin de valider chaque étape de calcul. Dans cette perspective, la première étude consiste à valider les deux implémentations FP_{Fer} et FP_{FEM} du modèle à puis-

sance fixée. Par la suite, ceci nous permettra d'utiliser ce modèle avec l'algorithme FP_{FEM} .

Pour comparer les différents résultats obtenus avec les deux algorithmes FP_{Fer} et FP_{FEM} , nous allons définir les grandeurs γ et Δ sans dimension usuellement utilisées [25]. γ est le coefficient non-linéaire dépendant de la puissance

$$\gamma = \frac{n_{Kerr}^2 P}{A_0} \quad (4.2)$$

où A_0 caractérise la taille du cœur de la fibre telle que $A_0 = \pi(\Lambda/2)^2$ pour la FOM et $A_0 = \pi R_c^2$ pour la fibre à saut d'indice.

✎ **Remarque 16 :** Nous retrouvons à travers le coefficient γ , le terme $n_{Kerr}^2 P$. Comme nous l'avons précédemment expliqué (point clé de la section 2.3.1), ce facteur est important car il caractérise la puissance à injecter *en fonction* du matériau pour obtenir la solution non-linéaire souhaitée.

La fonction Δ est définie telle que

$$\Delta = \frac{\beta_{NL} - \beta_{lin}}{k_0} \quad (4.3)$$

où β_{NL} est la constante de propagation obtenue à la convergence de l'algorithme itératif non-linéaire. β_{lin} correspond à la constante de propagation issue de la résolution du problème linéaire et k_0 est le nombre d'onde tel que $k_0 = 2\pi/\lambda$.

Pour la comparaison des deux approches numériques de la méthode à puissance fixée (FP_{Fer} et FP_{FEM}), nous modélisons des FOMs dont les paramètres opto-géométriques correspondent à ceux utilisés dans les structures définies dans la référence [25]. Il s'agit de FOMs en silice présentant un effet Kerr optique entourant des inclusions circulaires d'air. Le pitch Λ est égal à $23.0 \mu\text{m}$ séparant des inclusions d'air de différents rayons et à une longueur d'onde λ égale à $1.55 \mu\text{m}$.

Comme évoqué dans la section précédente (figure 4.2), il y a une différence : pour l'algorithme FP_{Fer} la structure est périodisée tandis que pour l'algorithme FP_{FEM} , il s'agit d'une FOM possédant un nombre fini de rangées de trous d'air. Cependant, nous savons que l'effet non-linéaire confine le champ au centre de la structure, il suffit alors de modéliser une fibre avec suffisamment de rangées de trous d'air (nous avons considérés quatre rangées) pour bien approcher la configuration périodique, ce que nous vérifierons bien entendu.

L'évolution de la fonction Δ suivant le coefficient non-linéaire γ est alors illustrée par la figure 4.3. La répartition du champ associé à certains cas dans la FOM est représentée par la figure 4.4.

Les courbes montrées par la figure 4.3 sont construites en augmentant progressivement la puissance P en entrée du processus (variation du facteur γ). Le point

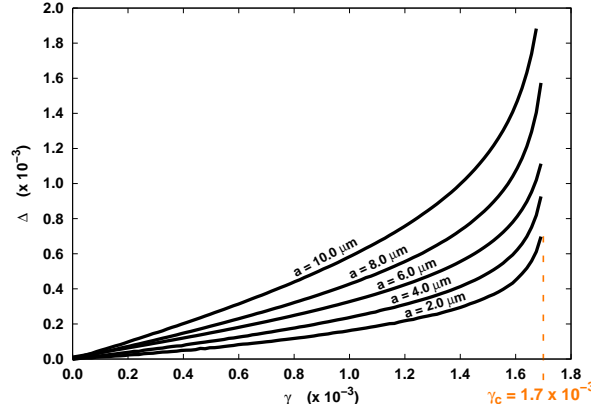


FIGURE 4.3 – Dépendance de la fonction Δ suivant le coefficient non-linéaire γ pour différents rayons de trous d'air à $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$. Ces résultats sont obtenus en utilisant l'algorithme FP_{FEM} et la valeur critique avant sa divergence est notée γ_c .

de départ est le cas linéaire à puissance nulle ($\gamma = 0$). De manière intuitive, plus la puissance augmente, plus l'effet de la non-linéarité est important et plus la valeur de la constante de propagation β augmente (comme le montre l'évolution de Δ en fonction de γ sur la figure 4.3). De même, plus la puissance augmente et plus le champ se confine au centre de la fibre (figure 4.4).

De plus, la figure 4.3 montre une limite approximative en puissance remarquable par l'évolution asymptotique de la valeur de Δ . Nous pouvons alors définir une valeur critique de γ notée γ_c correspondant à cette asymptote. Ainsi, pour $\gamma_c \approx 1.7 \times 10^{-3}$ et pour les différentes fibres considérées, nous observons une explosion de la valeur de Δ . Dès que $\gamma > \gamma_c$, l'algorithme FP_{FEM} devient divergent car la valeur de β obtenue augmente sans se stabiliser à chaque étape d'itération.

Cette limite correspond à la frontière entre l'auto-focalisation stable engendrée par l'effet Kerr optique ($\gamma \leq \gamma_c$) et l'auto-focalisation instable ($\gamma > \gamma_c$). L'autofocalisation instable correspond ici au confinement continu (*i.e.* sans stabilisation) du champ au centre de la fibre optique au cours du processus itératif.

La figure (4.4) nous donne la même évolution et la même valeur critique γ_c que celles données par l'algorithme FP_{Fer} (voir FIG. 3.(a) de la référence [25]).

Enfin, la figure 4.4 montre la répartition du champ dans la fibre optique micro-structurée décrite dans cette section pour différentes valeurs de γ et pour des trous d'air de rayon $a = 6.0 \mu\text{m}$. Comme précédemment évoqué, l'effet non-linéaire et donc le confinement du champ sont d'autant plus que la puissance injectée est importante. Nous remarquons que pour $\gamma = \gamma_c$ (figure 4.4(c)), l'effet des inclusions d'air est inexistant. Pour $\gamma > \gamma_c$ (figure 4.4(d)), nous remarquons l'auto-focalisation instable du champ qui se traduit par l'explosion de la valeur de Δ (figure 4.3).

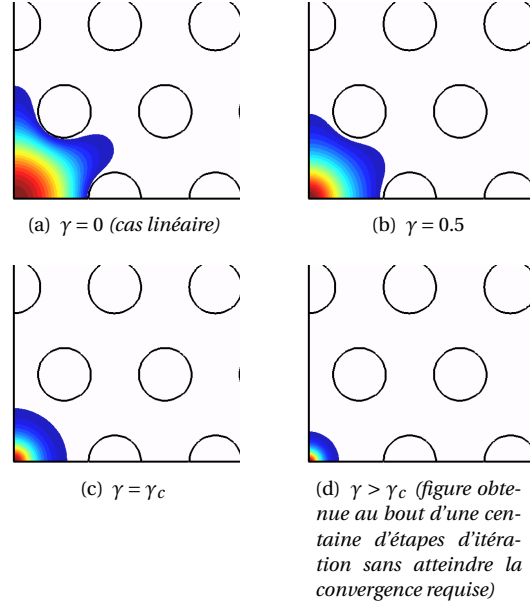


FIGURE 4.4 – Répartition du champ pour différentes puissances dans la FOM décrite dans cette section pour des trous d'air de rayon $a = 6.0 \mu\text{m}$ et pour le mode fondamental à $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$.

Ainsi, la parfaite similitude entre les deux approches numériques (algorithmes FP_{Fer} et FP_{FEM}) de la méthode à puissance fixée montre que :

- la modélisation d'une FOM à quatre rangées d'inclusions est une excellente approximation du modèle périodique dans le cas non-linéaire
- l'utilisation de l'algorithme FP_{FEM} est adaptée pour l'étude des propriétés physiques de la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{\text{Lin1D-Gold}}$.

4.1.3 Le soliton spatial : une solution de haute puissance

Grâce à l'étude précédente, nous pouvons nous baser sur la méthode à puissance fixée et sur l'algorithme FP_{FEM} pour comprendre la signification physique de la solution non-linéaire auto-cohérente.

Pour comparer les deux types de solutions non-linéaires obtenues avec les algorithmes FP_{FEM} et $SC_{\text{Lin1D-Gold}}$, nous allons procéder comme suit :

- ➊ Nous utilisons l'algorithme $SC_{\text{Lin1D-Gold}}$ afin d'obtenir dans une géométrie et à une longueur d'onde données, la solution non-linéaire auto-cohérente.

- ② Nous en déduisons une grandeur notée $P_{coh.}$ telle que si F représente le domaine transverse de la fibre alors

$$P_{coh.} = \int_F |\chi_{coh.} \psi_{coh.}|^2 dS \quad (4.4)$$

où $\chi_{coh.} \psi_{coh.}$ correspond au champ renormalisé obtenu à la convergence de $SC_{Lin1D-Gold}$ (et donc pour le minimum de résidu). $P_{coh.}$ s'exprime en m^2 puisque le champ $\chi_{coh.} \psi_{coh.}$ est sans dimension.

- ③ À partir de $P_{coh.}$ (grandeur numérique obtenue *en sortie de $SC_{Lin1D-Gold}$*), nous en déduisons la puissance physique P_{phys} (en watt) telle que

$$P_{phys} = \frac{P_{coh.}}{n_{Kerr}^2}. \quad (4.5)$$

où le coefficient n_{Kerr}^2 s'exprime ici en $m^2.W^{-1}$ pour permettre la comparaison avec l'algorithme FP_{FEM} précédemment défini.

- ④ Nous injectons *en entrée* de l'algorithme FP_{FEM} des valeurs croissantes de puissance P jusqu'à la valeur $P = P_{phys}$ obtenue *en sortie* avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$.

✓ Dans la fibre optique à saut d'indice

La figure 4.5 donne la comparaison entre les algorithmes FP_{FEM} et $SC_{Lin1D-Gold}$ pour la fibre à saut d'indice de rayon de cœur $R_c = 2.0 \mu m$ et à une longueur d'onde $\lambda = 1.0 \mu m$. Nous observons dans le cas de l'algorithme FP_{FEM} le même phénomène observé dans la fibre optique microstructurée (figure 4.3) : il existe une puissance critique γ_c au delà de laquelle le processus itératif de la méthode à puissance fixée FP_{FEM} diverge. Le point vert correspond à la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ (à la convergence et pour le minimum de résidu).

⊛ Point clé :

La figure 4.5 nous montre que la puissance critique de l'algorithme FP_{FEM} n'est autre que la puissance physique P_{phys} représentant la puissance du soliton spatial obtenu avec notre algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$. Ceci signifie que, si $\gamma_{coh.} = P_{coh.}/A_0$ correspond à la puissance du soliton spatial alors $\gamma_{coh.} = \gamma_c$. La solution auto-cohérente est donc *la solution de plus haute puissance correspondant exactement à la limite entre l'auto-focalisation stable ($\gamma \leq \gamma_c$) et l'auto-focalisation instable ($\gamma > \gamma_c$)*. Comme nous réalisons une étude des solutions non-linéaires dans la section transverse de la fibre optique, nous appelons cette solution particulière : le *soliton spatial*.

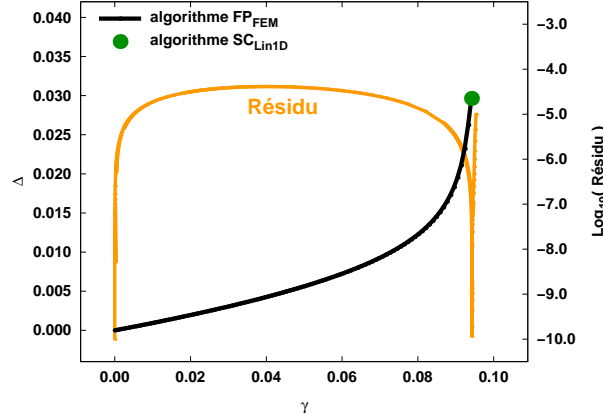


FIGURE 4.5 – Comparaison entre les algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} pour la fibre à saut d'indice décrite dans cette section à $\lambda = 1.0 \mu m$ et analyse du résidu correspondant. Δ représente l'indice effectif (relation (4.3)) et γ (relation (4.2)) correspond à la puissance injectée en entrée de FP_{FEM} et obtenue en sortie de $SC_{Lin1D-Gold}$. Le point vert est la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec $SC_{Lin1D-Gold}$.

L'étude du résidu nous confirme qu'il n'existe que deux minima : celui correspondant à la solution linéaire (puissance nulle, $\gamma = 0$) et celui correspondant à la solution non-linéaire auto-cohérente ($\gamma = \gamma_c$).

✎ **Remarque 17 :** Pour des valeurs de $\gamma > \gamma_c$, l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ converge encore ($\delta^{relat} < 10^{-10}$) ce qui explique que nous puissions prolonger le calcul du résidu au-delà de cette valeur. Au contraire, l'algorithme FP_{FEM} diverge.

Enfin, le calcul du résidu nous montre qu'en dehors de ces deux minima, les solutions obtenues avec l'algorithme à puissance fixée FP_{FEM} ne correspondent pas à un résidu minimum et ne sont donc pas considérées comme des solutions non-linéaires auto-cohérentes telles que nous les avons définies.

✓ Dans la fibre optique microstructurée

Nous effectuons la même étude pour la FOM afin d'étendre la validité des résultats obtenus dans la fibre à saut d'indice. La figure 4.6 montre les simulations pour deux fibres optiques microstructurées ayant des tailles d'inclusions différentes.

Comme précédemment, nous remarquons que l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ permet de trouver directement (et donc plus rapidement) la solution non-linéaire auto-cohérente correspondant à la puissance critique γ_c . Nous retrouvons également les deux minima du résidu pour $\gamma = 0$ (cas linéaire) et $\gamma = \gamma_c$ (puissance critique).

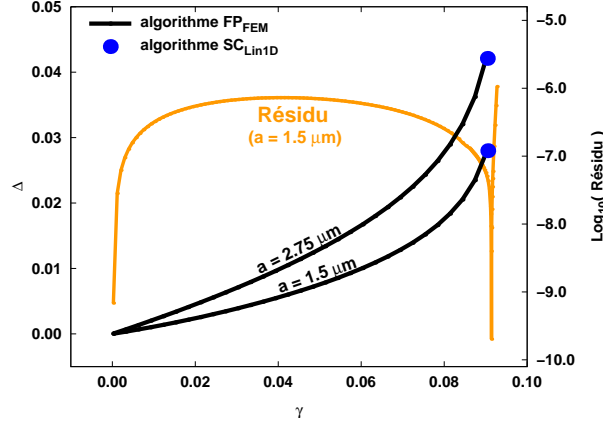


FIGURE 4.6 – Comparaison entre les algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} pour une FOM à trois rangées de trous d'air de rayon $a = 1.5 \mu m$ et $a = 2.75 \mu m$, de pitch $\Lambda = 10.0 \mu m$ et pour $\lambda = 5.0 \mu m$. Représentation du résidu associé pour la FOM dont le rayon des inclusions est $a = 1.5 \mu m$.

Remarque 18 : La figure 4.6 montre que la position du γ correspondant au soliton spatial est différente suivant la taille des inclusions d'air de la FOM. Ceci semble indiquer que la solution non-linéaire auto-cohérente est dépendante de la structure transverse de la fibre optique malgré un fort confinement. Nous étudierons ce phénomène dans les sections suivantes avec notamment la généralisation du soliton de Townes.

Ainsi, dans les deux types de fibres étudiées (à saut d'indice et microstructurée), l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ nous donne :

- ✓ directement
- ✓ à la convergence ($\delta^{relat} < 10^{-10}$)
- ✓ pour un minimum de résidu

une unique solution non-linéaire auto-cohérente ou soliton spatial correspondant à la puissance maximale que nous pouvons atteindre avant l'auto-focalisation instable. Au contraire, l'algorithme FP_{FEM} ne nous permet pas d'obtenir directement la puissance correspondant au soliton spatial car il nécessite une étude asymptotique des courbes générées.

4.1.4 Étude de la convergence des algorithmes auto-cohérent et à puissance fixée

D'après l'étude précédente, nous savons que l'évolution de la valeur de Δ est asymptotique pour des γ se rapprochant de γ_c . Nous pouvons alors effectuer une

étude de convergence pour les deux algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} afin de déterminer la précision des grandeurs caractérisant le soliton spatial.

La figure 4.7 donne la comparaison de la convergence des deux algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} au voisinage de $\gamma = \gamma_c$ pour une FOM à trois rangées de trous d'air de rayon $a = 1.5 \mu\text{m}$, de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$ et pour $\lambda = 5.0 \mu\text{m}$.

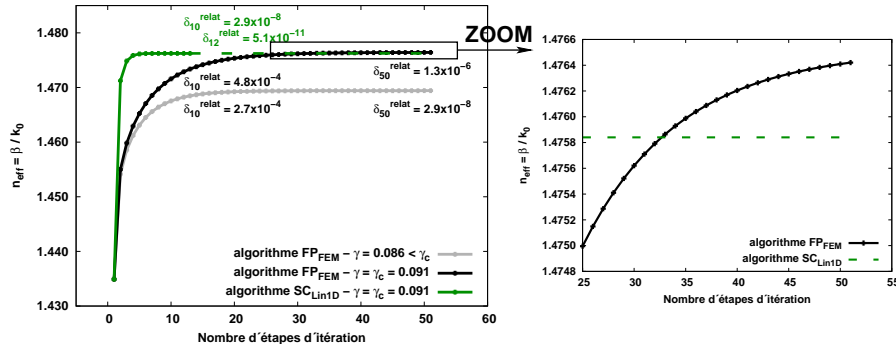


FIGURE 4.7 – Convergence de $SC_{Lin1D-Gold}$ comparée à celle de FP_{FEM} pour la FOM décrite dans cette section à $\lambda = 5.0 \mu\text{m}$. δ_i^{relat} est la valeur absolue de l'écart relatif entre les valeurs de β aux étapes $i - 1$ et i . Pour effectuer une comparaison précise, la valeur de l'indice effectif $n_{eff} = \beta/k_0$ obtenue avec $SC_{Lin1D-Gold}$ à l'étape 13 est prolongé jusqu'à l'étape 50.

Cette étude montre que la convergence est atteinte plus rapidement pour l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$. En effet, il ne suffit que de 13 étapes d'itération pour obtenir la solution non-linéaire auto-cohérente avec la convergence requise ($\delta^{relat} < 10^{-10}$). Pour des valeurs de γ nettement en deçà de γ_c , l'algorithme FP_{FEM} atteint la convergence après moins de 50 étapes. Plus la valeur de γ est faible, plus le nombre d'étapes requises pour atteindre la convergence de la méthode est faible.

En revanche pour des valeurs de γ proches de la valeur critique γ_c (comme l'exemple de la figure 4.7), la convergence n'est pas atteinte au bout de 50 étapes ($\delta_i^{relat} > 10^{-10}$) et est même mauvaise pour $\gamma = \gamma_c$ ($\delta_i^{relat} > 10^{-6}$). Tout semble indiquer que la convergence n'est pas atteignable pour $\gamma = \gamma_c$.

De plus, nous remarquons que pour $\gamma = \gamma_c$, la valeur de l'indice effectif n_{eff} obtenue avec FP_{FEM} dépasse la valeur trouvée avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ à la convergence et au minimum de résidu.

✎ **Remarque 19 :** Pour atteindre la convergence requise, le nombre d'étapes d'itération dépend de la structure considérée, du maillage ou encore de la longueur d'onde d'étude. Pour les résultats donnés par la figure 4.7, le même maillage est utilisé dans les deux algorithmes.

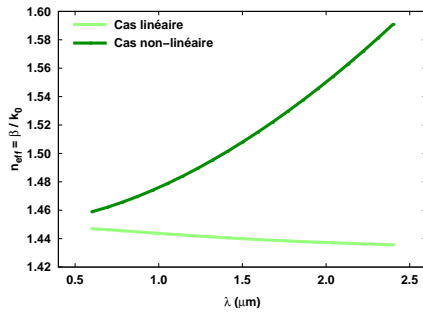
Ainsi, la comparaison des algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} nous montre que la solution non-linéaire auto-cohérente correspond à la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable. Enfin, l'utilisation de $SC_{Lin1D-Gold}$ que nous proposons, nous permet d'obtenir directement et avec précision les caractéristiques du soliton spatial telles que la puissance P_{phys} à injecter pour l'obtenir et l'indice effectif n_{eff} correspondant.

4.2 Influence des paramètres opto-géométriques

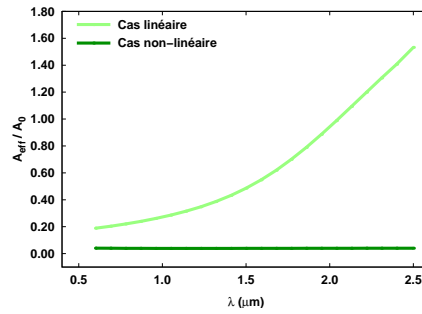
Nous venons de définir avec précision la solution non-linéaire auto-cohérente grâce à l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$. En particulier, à l'aide de l'approche à puissance fixée, nous savons à présent qu'il s'agit de la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable. Nous pouvons donc nous poser une question : cette solution n'est-elle pas la solution non-linéaire obtenue dans un milieu homogène ? En d'autres termes, la solution non-linéaire auto-cohérente dépend-elle de la structure considérée ou est-elle trop confinée au centre des fibres optiques étudiées ?

4.2.1 Propriétés du soliton spatial suivant la longueur d'onde

En préliminaire, nous étudions l'évolution du soliton spatial suivant la longueur d'onde λ . Nous commençons cette étude dans le cas de la fibre à saut d'indice. Comme attendu, l'effet non-linéaire entraîne une augmentation de l'indice effectif par rapport au cas linéaire à une longueur d'onde λ fixée (figure 4.8(a)).



(a) Évolution de l'indice effectif des configurations linéaire et non-linéaire suivant la longueur d'onde λ



(b) Évolution de l'aire effective normalisée par la taille caractéristique de cœur $A_0 = \pi R_c^2$ suivant la longueur d'onde λ du cas linéaire et comparée au cas non-linéaire

FIGURE 4.8 – Évolution de l'indice effectif (a) et de l'aire effective (b) dans les cas linéaire et non-linéaire suivant la longueur d'onde λ pour une fibre à saut d'indice de rayon de cœur $R_c = 2.0 \mu\text{m}$. Dans le cas non-linéaire, il s'agit de la solution auto-cohérente obtenue pour le minimum de résidu avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$.

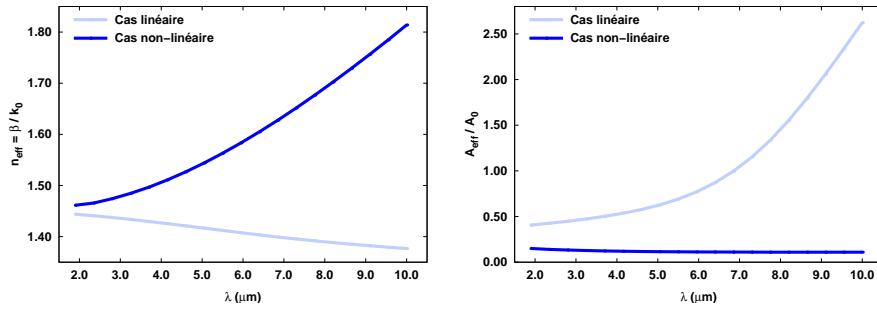
La figure 4.8(a) montre que plus la longueur d'onde augmente, plus l'indice effectif dans le cas linéaire décroît (*i.e.* moins le champ est confiné). Le phénomène inverse se produit pour l'indice effectif dans le cas non-linéaire. Ainsi, plus la longueur d'onde est importante, plus l'effet non-linéaire est important. Mais dans quelles proportions l'effet non-linéaire agit-il sur le champ ?

L'étude de l'évolution de l'aire effective suivant la longueur d'onde (figure 4.8(b)) nous montre que dans le cas non-linéaire cette grandeur est constante en comparaison du cas linéaire. Nous savons que l'aire effective représente quantitativement l'étalement du champ dans la fibre optique telle que :

$$\frac{A_{eff}}{A_0} = \frac{1}{\pi R_c^2} \times \frac{\left(\int_F |\psi_{coh.}(x, y)|^2 dS \right)^2}{\int_F |\psi_{coh.}(x, y)|^4 dS}. \quad (4.6)$$

La définition de l'aire effective et son évolution suivant la longueur d'onde nous permettent de montrer que le champ représentant la solution auto-cohérente est très sensiblement le même dans la fibre à saut d'indice en comparaison du cas linéaire lorsque la longueur d'onde varie.

Nous faisons la même étude dans le cas de la fibre optique microstructurée à cœur plein (figure 4.9) et nous observons les mêmes comportements. Plus la longueur d'onde augmente, plus l'effet non-linéaire est important.



(a) Évolution de l'indice effectif des configurations linéaire et non-linéaire suivant la longueur d'onde λ

(b) Évolution de l'aire effective normalisée par la taille caractéristique de cœur $A_0 = \pi(\Lambda/2)^2$ suivant la longueur d'onde λ du cas linéaire et comparée au cas non-linéaire

FIGURE 4.9 – Évolution de l'indice effectif (a) et de l'aire effective (b) dans les cas linéaire et non-linéaire suivant la longueur d'onde λ pour la FOM décrite dans la section 4.1.4. Dans le cas non-linéaire, il s'agit de la solution auto-cohérente obtenue pour le minimum de résidu avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$.

Concernant l'aire effective (figure 4.9(b)), nous remarquons qu'elle est quasi constante dans le cas non-linéaire par rapport au cas linéaire.

⊛ **Point clé :**

Que ce soit dans la fibre à saut d'indice ou dans la fibre optique microstructurée, l'évolution de l'aire effective montre que l'effet non-linéaire vient contre-carrer la diffraction (dans la dimension transverse) du champ dans la fibre. Ceci est non seulement vrai à une longueur d'onde fixée (auto-focalisation stable du champ au cœur de la fibre) mais aussi lorsque l'étude est réalisée sur une large plage de longueur d'onde.

4.2.2 Influence de la structure de la fibre

Comme nous venons de le voir, la répartition du soliton spatial dans la fibre optique à saut d'indice ou microstructurée est quasiment la même suivant la longueur d'onde. De plus, comme nous l'avons montré dans la section 4.1.3, la solution non-linéaire auto-cohérente correspond à la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable. Enfin, les figures 3.20(c) et 3.24(c) montrent que le soliton spatial est particulièrement confiné dans le cœur des deux types de fibres optiques considérées.

Nous pouvons alors nous demander si la structure transverse de la fibre optique étudiée a une influence sur les caractéristiques du soliton spatial. Au premier abord, la réponse serait négative : la solution non-linéaire ne serait que la solution du milieu homogène où le "guide" est produit par la modulation de l'indice de réfraction dû à l'effet Kerr optique (équation (1.23)).

Pour répondre précisément à cette question, nous allons étudier l'effet de la structure transverse sur la solution auto-cohérente dans :

- le milieu homogène non-linéaire (préliminaire)
- la fibre à saut d'indice avec différentes tailles de cœur non-linéaire
- la FOM avec différentes tailles d'inclusions d'air.

✓ **Préliminaire : la solution auto-cohérente pour un milieu homogène non-linéaire**

La première étude concerne la détermination de la solution auto-cohérente dans un milieu homogène présentant un effet Kerr optique. En théorie, il s'agit d'une structure infinie où l'indice de réfraction linéaire est constant dans tout le domaine et présente un effet Kerr optique. C'est cet effet qui, lorsque nous injectons une puissance, modifie le profil d'indice du milieu et crée un guide semblable à une fibre à gradient d'indice.

En pratique, pour permettre la résolution numérique du problème non-linéaire, nous utilisons l'algorithme *SC_{Lin1D-Gold}* et nous assimilons le milieu homogène à une fibre optique à saut d'indice dont le rayon du cœur est grand devant l'étalement du champ non-linéaire. Ceci signifie que dès l'étape d'itération 1 (première itération non-linéaire), le champ n'atteint pas l'interface entre le cœur et la gaine. De cette façon, la solution non-linéaire obtenue au cours du processus itératif est

bien celle du milieu homogène.

Pour vérifier le rôle négligeable de l'interface, nous avons progressivement augmenté la taille du cœur en étudiant l'évolution de la valeur de β suivant le rayon du cœur. Lorsque l'évolution de la valeur de β obtenue à la convergence et au minimum de résidu est constante, il s'agit bien de la solution non-linéaire auto-cohérente du milieu homogène pour une longueur d'onde fixée.

La figure 4.10 montre le profil de la solution normalisée $|\chi_{coh}\psi_{coh}|$ obtenue à la convergence du processus itératif $SC_{Lin1D-Gold}$ et pour le minimum de résidu dans le milieu homogène non-linéaire à la longueur d'onde $\lambda = 7.0 \mu m$.

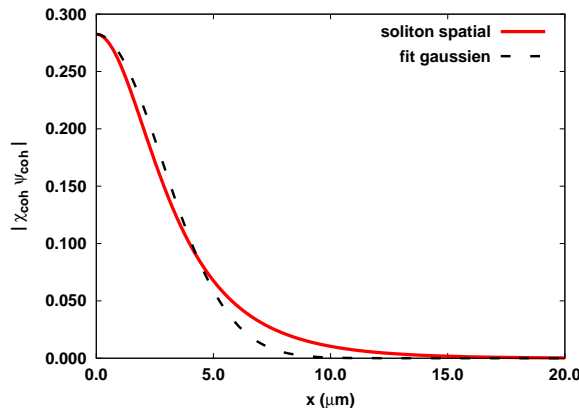


FIGURE 4.10 – Profil et fit gaussien associé de la solution $|\chi_{coh}\psi_{coh}|$ obtenue à la convergence et pour le minimum de résidu avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ dans le milieu homogène. L'indice de réfraction linéaire est égal à 1.45. L'abscisse correspond à une dimension transverse dans le milieu homogène (par exemple l'axe $0x$).

Le fit gaussien montre que cette solution non-linéaire auto-cohérente dans le milieu homogène est voisine d'une fonction gaussienne (voir la section 4.3.1 et la figure 4.16) mais nous permet surtout de la différencier d'une telle fonction. Ce dernier point sera utile lors de l'étude des différents profils de solutions non-linéaires étudiés dans la suite (voir figures 4.16 et 4.18).

Par ailleurs, la figure 4.11 montre l'évolution de l'indice effectif suivant la longueur d'onde de la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ dans le milieu homogène. Nous remarquons que l'indice effectif est constant suivant la longueur d'onde en comparaison de son évolution dans les fibres optiques à saut d'indice. Cependant, si nous analysons plus précisément les différentes valeurs obtenues en fonction de λ , nous remarquons que la détermination de l'indice effectif par l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ est assez sensible.

Pour déterminer la valeur de l'indice effectif du milieu homogène non-linéaire, nous ajustons par une droite l'ensemble des valeurs obtenues et correspondant aux différentes longueurs d'onde étudiées. Le fit donne une pente égale à 3.2×10^{-5} et une ordonnée à l'origine égale à 1.4555. L'indice effectif de milieu homogène pour la plage de longueurs d'onde étudiée est donc constant avec $n_{eff} \approx 1.4540$.

Or, d'après Townes [21], l'indice effectif peut être donné par la relation

$$n_{eff} = \left(n_0^2 + \epsilon_2 \frac{E^2(0)}{9.72} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

où ϵ_2 est le carré du coefficient non-linéaire de l'ordre de 10^{-2} , $E(0)$ le maximum du module du champ au centre de la géométrie et n_0 la partie linéaire de l'indice de réfraction. Comme $E(0)$ est de l'ordre de l'unité et n_0 est égal à 1.45, la formule de Townes nous *confirme* la valeur de l'indice effectif que nous obtenons. En effet, avec l'équation (4.7), nous obtenons $n_{eff} \approx 1.4504$: l'effet non-linéaire est donc faible dans le milieu homogène.

Pour cette raison, dans la section 4.3, nous allons étudier en détail le soliton de Townes obtenu numériquement dans les années soixante.

✓ Cas de la fibre à saut d'indice

La seconde étude concerne la fibre à saut d'indice. Pour cela, nous analysons l'évolution en longueur d'onde de la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ et pour différents rayons R_c du cœur non-linéaire (figure 4.11). Rappelons que dans cette configuration le contraste d'indice respecte l'approximation du guidage faible dans le cas linéaire.

La figure 4.11 montre qu'à une longueur d'onde donnée, la solution non-linéaire auto-cohérente présente un indice effectif différent suivant le rayon du cœur de la fibre à saut d'indice. Plus la taille du cœur augmente (*i.e.* plus la structure tend vers le milieu homogène), plus l'indice de réfraction de la solution auto-cohérente diminue et se rapproche de celui obtenu dans le milieu homogène non-linéaire. La cohérence des simulations est donc bien vérifiée.

Par ailleurs, pour les faibles valeurs de λ , nous savons que le champ est plus confiné dans le cœur ce qui explique que l'influence de la structure transverse de la fibre diminue sensiblement pour se rapprocher du milieu homogène.

Ainsi, malgré le fort confinement du champ dans le cœur, les caractéristiques de la solution non-linéaire auto-cohérente dépendent de la structure transverse de la fibre à saut d'indice.

✓ Cas la fibre optique microstructurée

Nous savons que la structure d'une FOM est bien plus complexe que celle de la fibre à saut d'indice. Il est donc intéressant d'étudier l'influence de cette structure sur la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$.

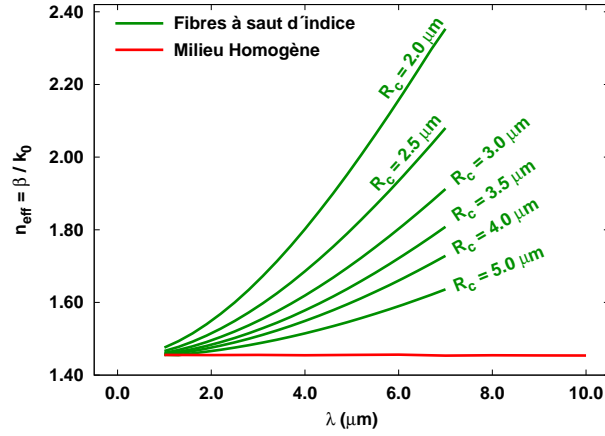


FIGURE 4.11 – Comparaison de l'indice effectif non-linéaire de la solution auto-cohérente selon la longueur d'onde pour différentes fibres à saut d'indice et pour le milieu homogène non-linéaire. L'indice de réfraction linéaire de la région guidante est dans les deux cas égal à 1.45.

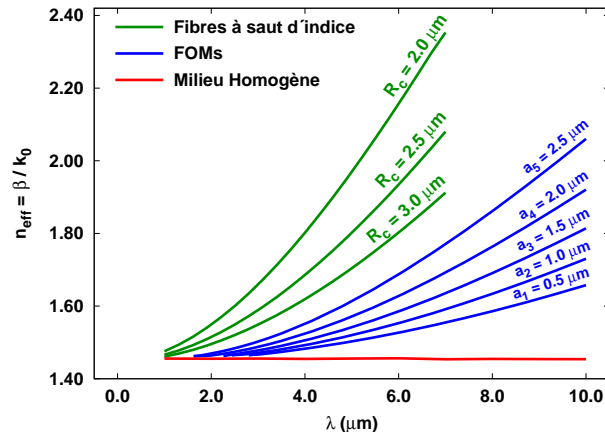


FIGURE 4.12 – Comparaison de l'indice effectif non-linéaire de la solution auto-cohérente selon la longueur d'onde pour différentes fibres à saut d'indice, pour des FOMs avec différentes tailles d'inclusions d'air et pour le milieu homogène non-linéaire. L'indice de réfraction linéaire dans la région guidante est dans tous les cas égal à 1.45.

La figure 4.12 montre que la solution non-linéaire obtenue est différente suivant la structure de la fibre optique microstructurée. En effet, à une longueur d'onde donnée, l'indice effectif du soliton spatial diminue avec la taille des d'inclusions

d'air. Ceci est donc parfaitement cohérent avec l'évolution du soliton spatial du milieu homogène.

Plus les trous d'air sont petits, plus la structure transverse de la FOM modélisée se rapproche de milieu homogène et plus les indices effectifs non-linéaires sont proches entre les deux structures. Nous avons également superposé ces courbes avec celles obtenues dans différentes fibres à saut d'indice.

Enfin, comme dans le cas de la fibre à saut d'indice, nous remarquons que l'écart entre les différentes géométries augmente avec la longueur d'onde. En effet, nous savons que plus la longueur d'onde augmente, plus le champ s'étend dans la fibre optique (voir par exemple la figure 4.9(a)) et donc plus la structure de celle-ci joue un rôle important.

Au contraire, plus la longueur d'onde diminue, plus le champ initial issu du problème linéaire est confiné au centre de la fibre et plus l'écart entre les différentes structures diminue. L'indice effectif des différentes fibres optiques converge alors vers celui obtenu dans le milieu homogène. Ceci nous permet une nouvelle fois de vérifier la cohérence de nos résultats.

✪ Point clé :

La figure 4.12 prouve numériquement que le soliton spatial correspondant à la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable, *n'est pas* le soliton spatial du milieu homogène non-linéaire comme nous pouvions le penser. Ceci constitue une nouvelle perception de la non-linéarité Kerr dans les fibres optiques. De plus, l'indice effectif du soliton spatial dépend non seulement du type de fibre optique modélisé (fibre à saut d'indice ou FOM) mais aussi des caractéristiques de la fibre optique. Dans la fibre à saut d'indice la taille du cœur joue un rôle important tandis que pour la FOM, il s'agit de la taille des inclusions d'air (ou plus généralement du rapport a/Λ). Enfin, nous avons remarqué que la longueur d'onde prenait une part prépondérante dans l'évolution de l'indice effectif et dans sa dépendance avec la structure transverse de la fibre.

4.2.3 Influence de la taille finie des FOMs

L'étude que nous menons ici concerne l'influence de la taille finie des FOMs étudiées. En effet, dans les études précédemment publiées [25, 28], la structure des FOMs était définie comme un réseau périodique infini avec un défaut central formé par l'omission d'un trou d'air. Notre étude considère au contraire des FOMs possédant un nombre fini N_r de rangées de trous d'air. La fibre optique microstructurée analysée ici est constituée d'inclusions d'air de rayon $a = 1.0 \mu\text{m}$ et dont le pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$.

La figure 4.13 montre l'influence du nombre N_r de rangées de trous d'air pour les cas linéaire et non-linéaire.

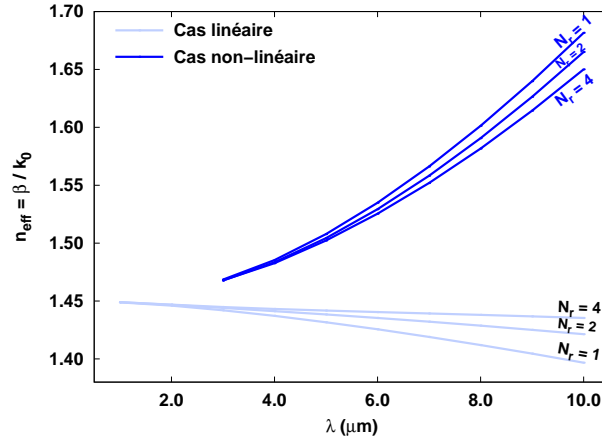


FIGURE 4.13 – Effet du nombre de rangées N_r d'inclusions d'air dans une FOM ($\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$ et $a = 1.0 \mu\text{m}$) sur l'évolution de l'indice effectif suivant la longueur d'onde dans les cas linéaire et non-linéaire.

➤ **Cas linéaire :**

Pour la configuration linéaire, l'indice effectif correspondant à $N_r = 1$ est inférieur à celui pour $N_r = 4$. Ceci est parfaitement cohérent car, lorsque la longueur d'onde augmente, plus le nombre de rangées augmente, plus le champ est guidé dans la structure. Par exemple, si $N_r = 1$, le champ dépasse l'unique rangée d'inclusions et fuit au-delà de celle-ci ce qui entraîne une diminution de l'indice effectif.

➤ **Cas non-linéaire :**

Dans le cas de la solution non-linéaire auto-cohérente, nous remarquons le phénomène inverse. À une longueur d'onde donnée, plus le nombre de rangées de trous d'air N_r augmente, plus l'indice effectif diminue. Comme nous l'avons précédemment remarqué dans la section 4.2.1, plus le mode fondamental provenant de la résolution du problème linéaire s'étend dans la fibre, plus l'effet non-linéaire est important et tant à confiner le champ au centre de la structure guidante. Remarquons que ce phénomène est également observable lorsque la longueur d'onde augmente à N_r fixé.

Ainsi, plus le nombre de couches d'inclusions d'air augmente, plus l'écart relatif entre le cas linéaire et non-linéaire diminue ce qui, comme nous venons de le voir, est en totale cohérence avec les résultats obtenus précédemment. Bien évidemment, plus la taille des trous augmente, plus l'effet de la dimension finie de la structure diminue. En effet, pour des inclusions plus importantes, la structure de la FOM se rapproche de la fibre à saut d'indice dont la gaine serait de l'air. L'influence de la taille du défaut central représentant le cœur est alors prédominant sur l'in-

fluence du nombre de rangées de trous d'air.

❑ Calcul des pertes dans le cas non-linéaire

Nous savons que la modulation d'indice

$$n_{coh.}^2 = n_0^2 + |\chi_{coh.}\psi_{coh.}|^2 \quad (4.8)$$

engendrée par le soliton spatial est proportionnelle au carré du champ $\chi_{coh.}\psi_{coh.}$. Les fibres optiques que nous étudions sont donc à gradient d'indice. Le mode fondamental que nous prenons en compte est alors un *mode guidé*, c'est-à-dire sans pertes, localisé au centre de la fibre optique.

☞ **Hypothèse 7 :** D'après ce qui précède, nous pouvons penser que les pertes sont nulles pour le soliton spatial dans les fibres optiques microstructurées et dans le cadre de l'étude du mode fondamental.

Il est alors intéressant d'étudier numériquement les pertes pour la solution non-linéaire auto-cohérente. L'évaluation des pertes peut être réalisée par le calcul de la partie imaginaire de la constante de propagation β ou de l'indice effectif n_{eff} associé. Pour cela, nous utilisons une PML circulaire dans le modèle scalaire (voir l'annexe B). La figure 4.14 montre l'influence du nombre de rangées dans différentes FOMs ($a = 1.5 \mu m$ et $\Lambda = 6.0 \mu m$).

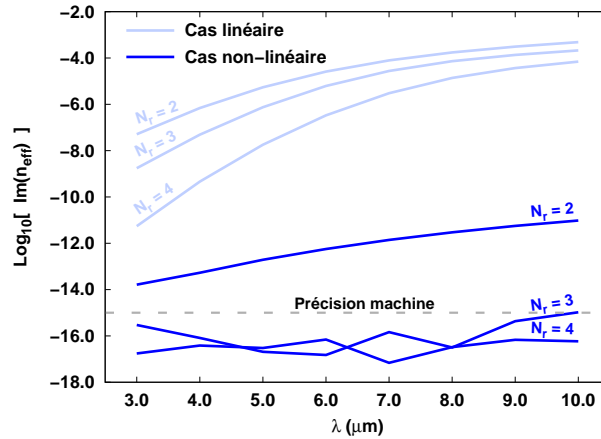


FIGURE 4.14 – Effet du nombre de rangées N_r d'inclusions d'air dans une FOM ($\Lambda = 6.0 \mu m$ et $a = 1.5 \mu m$) sur l'évolution des pertes (partie imaginaire de l'indice effectif) suivant la longueur d'onde dans les cas linéaire et non-linéaire.

Pour la configuration linéaire, les pertes diminuent lorsque le nombre de rangées d'inclusions d'air augmente ce qui est bien entendu cohérent (voir en particulier la figure 7.6 de la référence [17]).

Pour le cas non-linéaire, nous remarquons que les pertes diminuent considérablement pour s'annuler (d'un point de vue numérique) dans les FOMs à trois et quatre rangées d'inclusions. En effet, dans ces deux cas les pertes sont en dessous de la précision machine (10^{-15}).

✎ **Remarque 20 :** Il est à noter que dans le cas d'une FOM à une ou deux couches de trous d'air, la précision machine est difficilement atteignable du fait de la contrainte sur la distance R_{int} entre la dernière rangée et la PML définie dans l'annexe B. En effet, nous ne pouvons pas éloigner la PML de manière trop importante car sinon, le champ se localise dans cette région (vue comme le défaut) et non au centre de la fibre optique microstructurée. Cependant, la valeur de la partie imaginaire de n_{eff} suivant R_{int} diminue très sensiblement lorsque l'éloignement de la PML augmente.

Ainsi, à la vue des résultats numériques obtenus nous pouvons vérifier l'hypothèse 7 et en conclure qu'il n'y a pas de pertes dans le cas de la solution non-linéaire auto-cohérente déterminée à partir du mode fondamental dans la fibre optique microstructurée.

4.2.4 Des puissances importantes...

Nous savons que l'effet non-linéaire de type Kerr optique n'apparaît dans les fibres optiques que pour des puissances élevées ce qui limite les applications expérimentales.

Pour déterminer les puissances physiques mises en jeu, nous devons calculer dans un premier temps la grandeur $P_{coh.}$ caractérisant le soliton spatial et obtenue numériquement avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ (à la convergence et pour le minimum de résidu) :

$$P_{coh.} = \int_F |\chi_{coh.} \psi_{coh.}|^2 dS \quad (4.9)$$

où F représente la section transverse de la fibre et $\chi_{coh.} \psi_{coh.}$ le champ renormalisé.

La grandeur P_{phys} est déduite de $P_{coh.}$ par la relation (d'après l'annexe C et les changements de variable (2.22) et (2.28))

$$P_{phys} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n_{eff} \frac{P_{coh.}}{n_{Kerr}^2} \quad (4.10)$$

où le coefficient non-linéaire n_{Kerr}^2 caractéristique du matériau s'exprime dans ce cas en $m^2.V^{-2}$ (se reporter à la section 1.3). La grandeur P_{phys} s'exprime donc en

watt et définie la puissance physique nécessaire à injecter dans la fibre optique pour obtenir les solitons spatiaux que nous avons obtenus numériquement.

La figure 4.15 montre que, pour les différentes études que nous avons réalisées dans la silice ($n_{Kerr}^2 = 6.16 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-2}$), les puissances sont très importantes.

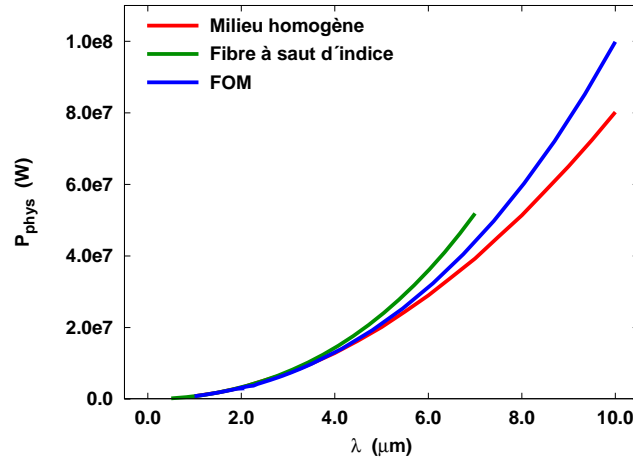


FIGURE 4.15 – Évolution de la puissance physique à injecter pour obtenir les solutions non-linéaires auto-cohérentes en fonction de la longueur d'onde dans les différentes structures de silice analysées ici : fibre optique à saut d'indice, FOM à cœur plein, milieu homogène non-linéaire.

Ces valeurs sont plus faibles pour les FOMs que pour les fibres à saut d'indice que nous avons modélisées, ce qui est naturellement très intéressant. Notons que pour le milieu homogène, les puissances sont légèrement plus faibles par rapport aux cas des fibres optiques. Ceci est cohérent à la vue des résultats obtenus précédemment pour cette structure particulière.

Dans le cas d'une fibre en silice, la densité de puissance maximale I_{cr} avant la destruction du matériau est $I_{cr} \approx 3 \times 10^{17} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ [55]. Dans ces conditions, la puissance physique doit vérifier l'inégalité suivante

$$P_{phys} < I_{cr} A_0 \quad (4.11)$$

où, pour une FOM, $A_0 = \pi(\Lambda/2)^2$ correspond à l'aire du cœur de la fibre où se situe la majorité du champ non-linéaire. Pour une FOM en silice et à cœur plein, de pitch $\Lambda = 6.0 \text{ μm}$ et de rayon d'inclusion $a = 1.5 \text{ μm}$, la puissance physique doit être inférieure à environ $1.0 \times 10^7 \text{ W}$. Pour les faibles longueur d'onde, nous sommes donc en deçà de la puissance critique de destruction des matériaux.

Des fibres optiques fabriquées en verre de chalcogénures présentent des effets non-linéaires (ou des valeurs de n_{Kerr}^2) jusqu'à 1000 fois supérieurs à ceux de la silice. La puissance à injecter pour obtenir les solitons spatiaux serait alors 1000 fois inférieure. Dans cette étude, nous nous sommes limités à l'analyse numérique des solutions non-linéaires mais, dans ces conditions et pour de faibles longueurs d'onde par rapport à la taille caractéristique des structures (R_c ou Λ), une étude expérimentale pourrait être envisagée.

4.3 Soliton de Townes et soliton spatial

Comme nous l'avons vu au cours de ce chapitre, le soliton spatial correspond à la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable. Nous pouvons alors nous demander si la solution non-linéaire auto-cohérente n'est pas le soliton de Townes : solution du milieu homogène non-linéaire [21].

4.3.1 Le soliton de Townes : la solution du milieu homogène non-linéaire

Pour obtenir la solution non-linéaire auto-cohérente, nous avons résolu l'équation non-linéaire (2.29)

$$\Delta_t \psi + k_0^2 (n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} |\chi \psi|^2) \psi = \beta^2 \psi \quad (4.12)$$

Dans le cas du milieu homogène, nous considérons l'équation (2.9)

$$\Delta_t \phi + k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} n_{Kerr}^2 |\phi|^2 \right) \phi = \beta^2 \phi \quad (4.13)$$

Pour l'étude de cette structure particulière, nous considérons une structure cylindrique [21, 27]. Dans ce cas, l'opérateur Laplacien transverse $\Delta_t = \partial_x^2 + \partial_y^2$ en coordonnées cartésiennes est remplacé par son équivalent en coordonnées cylindriques $\Delta_t = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r$.

☛ **Approximation :** L'opérateur Laplacien transverse s'exprimant en coordonnées cylindriques est $\Delta_t = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2$ où θ est la dépendance angulaire. Cependant, on néglige cette dernière car nous étudions le mode fondamental qui est centro-symétrique. Nous n'aurions pas pu prendre en compte cette approximation si des modes d'ordres supérieurs avaient été étudiés. Dans ce cadre, l'opérateur Laplacien transverse s'écrit bien $\Delta_t = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r$.

Dans ce cas, l'équation (4.13) devient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + k_0^2 \left(n_0^2 + n_{Kerr}^2 |\phi(r)|^2 \right) \phi(r) = \beta^2 \phi(r). \quad (4.14)$$

Si nous posons $\Gamma^2 = \beta^2 - n_0^2 k_0^2$ alors il vient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Gamma^2 \phi(r) + k_0^2 n_{Kerr}^2 \phi^3(r) = 0. \quad (4.15)$$

De plus, si nous effectuons le changement de variable $r = \tilde{r}/\Gamma$ et si nous posons $b = n_{Kerr}^2 (k_0/\Gamma)^2$ alors

$$\frac{\Gamma^2 \partial^2 \phi}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\Gamma}{\tilde{r}} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{r}} - \Gamma^2 \phi(\tilde{r}) + b \Gamma^2 \phi^3(\tilde{r}) = 0. \quad (4.16)$$

Enfin, si nous posons la grandeur *sans dimension* $R(\tilde{r}) = \sqrt{b} \phi(\tilde{r})$ alors nous obtenons la fonction R représentant le soliton de Townes [21, 27, 51], solution de l'équation

$$\Delta_t R(\tilde{r}) - R(\tilde{r}) + R^3(\tilde{r}) = 0 \quad \text{et tel que} \quad R'(0) = 0, \quad R(\infty) = 0. \quad (4.17)$$

Les conditions aux limites $R'(0) = 0$ et $R(\infty) = 0$ correspondent aux conditions aux limites des solutions obtenues dans les fibres optiques dans le cadre de l'étude du mode fondamental.

✎ **Remarque importante 21 :** Nous ne pouvons pas résoudre l'équation non-linéaire (4.17) avec GetDP telle que nous l'avons fait depuis le début. En effet, ne s'agissant pas d'une équation aux valeurs propres et la solution nulle étant la plus évidente, nous ne pourrions pas mettre en évidence une solution non triviale.

L'équation (4.17) est une équation différentielle du deuxième ordre (présence d'une dérivée seconde) qui est non-linéaire et avec deux conditions aux limites dont il n'existe pas de solution analytique simple. Nous devons alors résoudre numériquement l'équation (4.17) en utilisant *une méthode de tir* [11].

Le principe est simple :

- ❶ Transformation de l'équation différentielle du deuxième ordre (4.17) en deux équations différentielles du premier ordre tel que $R_1(\tilde{r}) = R(\tilde{r})$ et $R_2(\tilde{r}) = R'(\tilde{r})$. Dans ce cas, nous devons résoudre le système suivant

$$\begin{cases} R_2 = R_1' \\ R_2' + \frac{1}{\tilde{r}} R_2 - R_1 + R_1^3 = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

- ❷ Choix arbitraire d'une valeur de l'amplitude $R(0)$ (en $\tilde{r} = 0$) comme point de départ.
- ❸ Résolution du système d'équations différentielles (4.18) comme un problème différentiel à valeur initiale (Chap. 16 de la référence [11]) tout en respectant la première condition aux limites $R'(0) = 0$.
- ❹ Calcul de l'écart à "l'infini" (pour des valeurs de \tilde{r} grandes) entre la valeur de $R(\infty)$ donnée par la résolution numérique du système d'équations différentielles (4.18) et la contrainte $R(\infty)$ théorique ($R(\infty) = 0$).
- ❺ Retour au point ❷. La méthode de tir s'arrête lorsque l'écart défini au point ❹ est minimum. Nous obtenons alors la valeur $R(0)$ ainsi que le profil $R(\tilde{r})$ du soliton de Townes.

Nous implémentons cette méthode de tir et nous obtenons la valeur $R(0) = 2.2062$ et le profil R du soliton de Townes (figure 4.16).

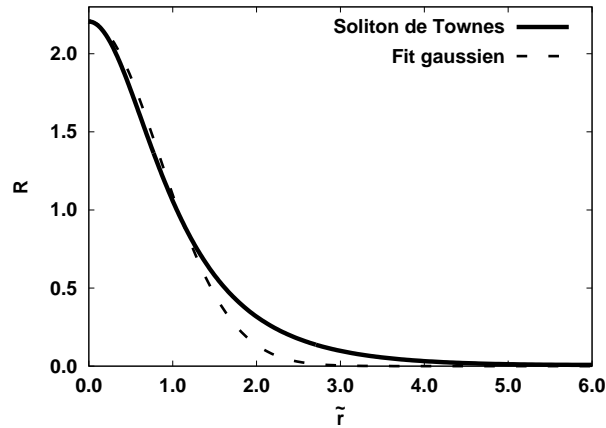


FIGURE 4.16 – Profil du soliton de Townes $R(\tilde{r})$ et fit gaussien de même puissance.

Nous remarquons que ce profil peut-être approximé par une fonction gaussienne permettant de distinguer la forme du soliton de Townes de la fonction gaussienne. Pour réaliser l'ajustement gaussien, nous avons utilisé la fonction :

$$2.2062e^{-\left(\frac{x}{2\sigma}\right)^2} \quad (4.19)$$

où $\sigma = 0.598251$. La fonction de fit utilisée est celle de Gnuplot basée sur l'algorithme de Levenberg - Marquardt [11]. La figure 4.16 est à comparer à la figure 4.10 obtenue par la résolution de notre problème non-linéaire avec l'algorithme

$SC_{Lin1D-Gold}$.

De plus, nous pouvons définir un coefficient *sans dimension* N_{cr} représentant la puissance du soliton de Townes tel que

$$N_{cr} = \int_H |R|^2 \tilde{r} d\tilde{r} \approx 1.862 \quad (4.20)$$

où H est le domaine d'intégration mono-dimensionnel représentant le milieu homogène. Dans la référence [27], la valeur $N_{cr} = 1.86225$ ce qui est en accord avec le résultat précédent que nous avons obtenu.

Les valeurs de $R(0)$, de N_{cr} et le profil de Townes que nous obtenons correspondent donc parfaitement avec celles publiées dans les référence [21, 27]. Pour valider plus précisément ces résultats, nous avons notamment contacté le Professeur Gadi Fibich du département de mathématiques appliquées de l'Université de Tel Aviv.

4.3.2 Le soliton spatial n'est pas le soliton de Townes !

Pour comparer les caractéristiques de la solution non-linéaire auto-cohérente avec celles du soliton de Townes, nous devons d'abord distinguer les deux problèmes. Le soliton spatial est issu d'un *problème aux valeurs propres* où la valeur propre est la constante de propagation β . Le soliton de Townes provient de la résolution d'une équation non-linéaire différentielle ordinaire. Les deux approches sont donc totalement différentes. Dans cette perspective, comment définir un coefficient comparable à N_{cr} et représentant la solution non-linéaire auto-cohérente ?

✓ Le coefficient N_{cr} du soliton de Townes :

Pour le soliton de Townes et en utilisant les grandeurs physiques, le coefficient N_{cr} (équation 4.20) représente la puissance critique du soliton de Townes définie dans les références [2] et [27] :

$$N_{cr} = \frac{4\pi n_0 n_2}{\lambda^2} P_{cr} \quad (4.21)$$

où P_{cr} (en watt) correspond à la limite inférieure de la puissance critique en fonction du matériau et de la longueur d'onde d'étude. n_2 est le coefficient non-linéaire caractéristique du matériau et est exprimé en m^2/W .

D'après l'équation (C.9) déterminée dans l'annexe C, la puissance physique P_{phys} obtenue dans le cas scalaire est :

$$P_{phys} = \frac{\beta \epsilon_0 n_0 c}{2k_0} \int_F |\phi(x, y)|^2 dS \quad (4.22)$$

où F représente la section transverse de la fibre optique. Dans le cas de l'étude du soliton de Townes, les solutions scalaires recherchées sont de la forme [27] :

$$\mathbf{E} = \phi(x, y) e^{ik_0 z - i\omega t} \mathbf{e}_x. \quad (4.23)$$

Ceci signifie que la constante de propagation β est fixée à k_0 . Nous pouvons donc en déduire facilement, avec la relation (4.22), l'expression de la puissance P_{cr} correspondant à ces solutions :

$$P_{cr} = \frac{\epsilon_0 n_0 c}{2} \int_F |\phi(x, y)|^2 dS. \quad (4.24)$$

✓ **Définition du coefficient de puissance $N_{coh.}$ du soliton spatial :**

Cependant, le problème non-linéaire que nous étudions dépend de la constante de propagation β , solution de l'équation aux valeurs propres de Helmholtz. Nous allons alors définir un coefficient *sans dimension* $N_{coh.}$ représentant la puissance du soliton spatial [23].

À l'aide de cette grandeur, nous pourrions étudier les différences entre les caractéristiques du soliton spatial (à travers le coefficient $N_{coh.}$) et celles du soliton de Townes (représenté par le coefficient N_{cr}).

Par comparaison des équations (4.22) et (4.24), nous avons

$$P_{phys} = \frac{\beta}{k_0} P_{cr}. \quad (4.25)$$

Or, dans le cas de la publication de Fibich [27], $2\pi/\lambda = k_0/n_0$ d'où

$$P_{phys} = \frac{\beta\lambda}{2\pi n_0} P_{cr}. \quad (4.26)$$

Donc, en utilisant l'expression de N_{cr} définie par l'équation (4.21), il vient :

$$N_{cr} = \frac{4\pi n_0 n_2}{\lambda^2} \frac{2\pi n_0}{\beta\lambda} P_{phys} = \frac{8\pi^2 n_0^2 n_2}{\beta\lambda^3} P_{phys} \quad (4.27)$$

Or, la grandeur $P_{coh.}$ caractérisant la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme *SC_{Lin1D-Gold}* peut être définie comme

$$P_{coh.} = n_{Kerr}^2 P_{phys} = \int_{\Omega} |\chi_{coh.}|^2 |\phi_{coh.}|^2 dS \quad (4.28)$$

où le coefficient n_{Kerr}^2 est exprimé en m^2/W et peut s'écrire $n_{Kerr}^2 = 2n_0 n_2$. Dans ce cas, $P_{coh.} = 2n_0 n_2 P_{phys}$.

En faisant apparaître la grandeur $P_{coh.}$ et la constante de propagation $\beta_{coh.}$ dans l'équation (4.27), nous obtenons l'expression du coefficient de puissance critique noté $N_{coh.}$ et associé à la solution non-linéaire auto-cohérente

$$N_{coh.} = \frac{4\pi^2 n_0}{\beta_{coh.} \lambda^3} P_{coh.} \quad (4.29)$$

où $\beta_{coh.}$ est la constante de propagation de la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ pour le minimum de résidu.

□ *Vérification de la cohérence de l'expression :*

Nous savons que si la longueur d'onde λ tend vers 0, l'indice effectif n_{eff} tend vers l'indice du milieu c'est à dire n_0 comme le montre la figure 4.12 (où dans notre cas $n_{eff} = \beta/k_0 = \beta\lambda/2\pi$). En d'autres termes, pour les simulations présentées, nous avons¹ :

$$\lambda \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad n_{eff} = \frac{\beta\lambda}{2\pi} \rightarrow n_0 \quad (4.30)$$

En utilisant l'équation (4.27), nous retrouvons bien l'expression donnée dans la référence [27] :

$$\lambda \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8\pi^2 n_0^2 n_2}{\beta \lambda^3} \rightarrow \frac{4\pi n_0^2 n_2}{\lambda^2} \frac{1}{n_0} \rightarrow \frac{4\pi n_0 n_2}{\lambda^2} \quad (4.31)$$

Nous pouvons alors comparer le coefficient correspondant à la puissance des solutions non-linéaires auto-cohérentes $N_{coh.}$ obtenu dans différentes fibres optiques avec celui du soliton de Townes N_{cr} correspondant au milieu homogène (figure 4.17).

✓ **Pour le milieu homogène :**

Le premier point concerne le milieu homogène. Nous observons que le soliton de Townes correspond à la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue dans le milieu homogène avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$. En effet, comme nous l'avons souligné au début de cette section, nous résolvons un problème non-linéaire aux valeurs propres où la constante de propagation β est prise en compte **au contraire** de l'approche de Townes [21] et de Fibich [27] où **la valeur de β est fixée** : $\beta = k_0$. L'approche de Townes est donc une autre approche de la non-linéarité comparée à la méthode que nous proposons.

1. Voir la signification des signes \Rightarrow et \rightarrow dans le Préambule.

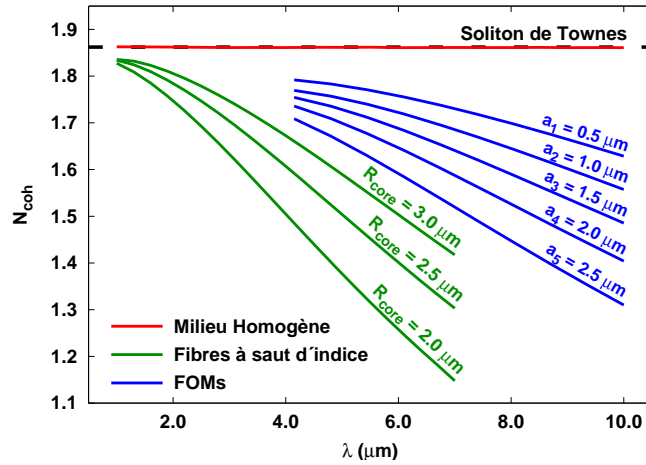


FIGURE 4.17 – Évolution du coefficient représentant la puissance auto-cohérente N_{coh} pour différentes fibres à saut d'indice, pour différentes FOMs et pour le milieu homogène en fonction de la longueur d'onde λ . La ligne horizontale pointillée représente le coefficient critique $N_{cr} = 1.862$ du soliton de Townes.

✳ Point clé :

L'étude en fonction de la longueur d'onde nous montre que le soliton de Townes et le soliton spatial du milieu homogène sont identiques. Ceci nous permet de valider l'expression du coefficient N_{coh} que nous avons défini. En effet, la valeur de N_{coh} obtenue :

- avec la MEF
- à la convergence de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ de résolution d'une équation aux valeurs propres
- pour le minimum de résidu
- dans le cas du milieu homogène

est égale au coefficient N_{cr} obtenu après la résolution d'une équation différentielle par une méthode de tir. Nous confirmons ici, de manière simple et avec une méthode plus générale, les résultats obtenus par Townes dans les années soixante [21]. Cependant, comme nous allons le voir dans la suite, nous allons *beaucoup plus loin* dans le cadre de notre nouvelle approche.

✓ Pour les fibres optiques :

De plus, comme l'avait suggéré l'évolution de l'indice effectif en fonction de la longueur d'onde (figure 4.11 et figure 4.12), la figure 4.17 illustre la dépendance de la solution non-linéaire auto-cohérente suivant : la longueur d'onde, le type de fibre optique et la structure transverse de la fibre considérée.

✪ **Point clé :**

Dans le cadre de cette étude, nous généralisons le soliton de Townes dans les fibres optiques à saut d'indice et microstructurée. La prise en compte de la structuration transverse ainsi que de la constante de propagation β nous permet d'élargir la notion de soliton de Townes : cas limite aux faibles longueurs d'onde du soliton spatial obtenu dans les fibres optiques avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$.

Pour les deux types de fibres optiques étudiées, fibre à saut d'indice et FOM, la valeur du coefficient $N_{coh.}$ converge vers N_{cr} quand la longueur d'onde diminue. En effet, plus la longueur d'onde est faible, plus le champ est confiné dans la fibre optique et donc moins l'influence de la structure est importante. Au contraire, pour des valeurs de λ élevées, l'influence de la structure transverse est importante.

Cependant, l'étude de la répartition spatiale du champ dans la fibre optique suivant la longueur d'onde ou suivant sa structure transverse nous montre une grande similitude entre les différents profils du champ (figure 4.18). En effet, un ajustement gaussien nous permet d'assimiler ces profils à celui du soliton de Townes.

Mais, pour différentes tailles d'inclusions, l'amplitude du soliton spatial est différente et ce, quelle que soit la longueur d'onde étudiée (figure 4.18(a) et figure 4.18(b)).

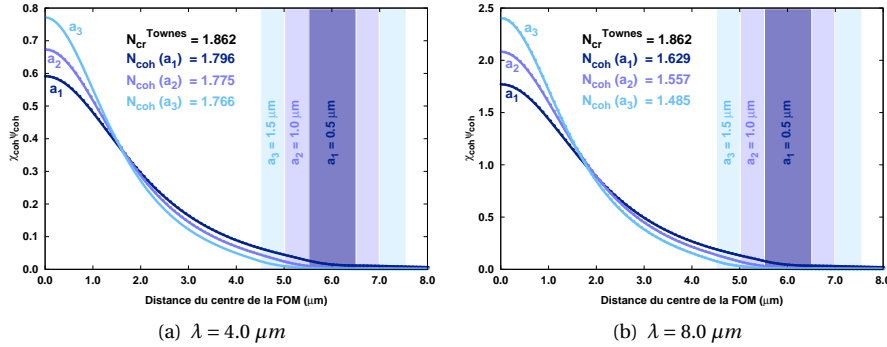


FIGURE 4.18 – Profil du champ et les coefficients N_{cr} et $N_{coh.}$ associés pour trois FOMs ayant des tailles de trous d'air différentes. Les régions colorées représentent la première inclusion d'air de la FOM en fonction de son rayon a .

✎ **Remarque 22 :** Comme le montre l'équation (4.29), le coefficient $N_{coh.}$ dépend non seulement de l'intégrale du champ mais aussi de la constante de propagation β et de la longueur d'onde λ . Ceci signifie que l'évolution de $N_{coh.}$ n'est pas forcément liée à la largeur (écart-type) du profil de la solution

non-linéaire auto-cohérente comme l'illustre la figure 4.18.

★ **Point clé :**

Le profil global des solutions non-linéaires auto-cohérentes est similaire au profil du soliton de Townes et peuvent être chacun approximé par une fonction gaussienne. L'utilisation d'une telle fonction nous permet de la différencier des deux types de solitons. Cependant, l'amplitude et la constante de propagation β sont différentes suivant la longueur d'onde et suivant la structure transverse de la fibre optique. Grâce à l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ et à la renormalisation du champ exposée dans la section 2.3.2, l'amplitude de la solution non-linéaire n'est pas altérée tout au long du processus itératif. Contrairement à d'autres études, nous mettons en évidence l'importance de l'amplitude et de la constante de propagation de la solution non-linéaire. Ceci nous permet de faire la différence entre le soliton spatial dans les fibres optiques et le soliton de Townes.

Conclusion

POUR COMPRENDRE ET ANALYSER les propriétés physiques de la solution non-linéaire auto-cohérente, nous avons procédé de manière progressive. La première étape concernait la comparaison entre la méthode auto-cohérente que nous proposons et la méthode à puissance fixée que nous avons implémentée par une simple modification de notre algorithme SC_{Lin1D} . Ceci nous a permis de montrer, grâce à l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$, que la solution non-linéaire auto-cohérente correspond à la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable du champ dans les fibres optiques. Dans un deuxième temps, nous avons pu étudier l'influence des paramètres opto-géométriques sur cette solution. L'analyse de l'évolution de la non-linéarité suivant la longueur d'onde nous a permis de montrer que l'effet Kerr optique tend à contrecarrer l'effet de la dispersion dans la fibre optique. La troisième étude concernait l'influence de la structure transverse des fibres étudiées. Le soliton de haute puissance n'est pas la solution non-linéaire du milieu homogène comme nous aurions pu le croire. L'étude du soliton de Townes par une méthode de tir nous a montré qu'il correspondait au soliton spatial dans le milieu homogène non-linéaire obtenu avec notre nouvelle approche validant une nouvelle fois la méthode numérique utilisée. De plus, nous avons montré que le soliton de Townes est le cas limite aux courtes longueurs d'onde de la solution non-linéaire auto-cohérente dans les fibres optiques. En revanche, et contrairement aux études réalisées jusqu'à présent, la prise en compte de l'amplitude, de la constante de propagation et de la structuration transverse finie nous ont permis de généraliser le soliton de Townes aux fibres optiques. En effet, nous avons montré que le soliton

spatial de plus haute puissance avant l'autofocalisation instable dans les fibres optiques était différent du soliton de Townes même si les profils des deux solitons sont très proches.

Nous pouvons alors nous demander si le modèle scalaire utilisé pour mettre en place la méthode numérique et comprendre les phénomènes mis en jeu et toujours aussi précis en présence d'un effet Kerr optique.

Chapitre

5

Le cas vectoriel : l'étude complète du problème non-linéaire dans les fibres

Introduction

L'IMPLÉMENTATION DU PROBLÈME NON-LINÉAIRE dans le cadre de l'approximation scalaire nous a permis de mettre en place notre méthode de résolution numérique originale dans la configuration scalaire. En effet, pour limiter le nombre de difficultés susceptibles d'être rencontrées dans l'approche d'un problème nouveau, l'étude du modèle scalaire était la meilleure solution. Nous avons pu y analyser et comprendre la signification des phénomènes non-linéaires mis en jeu avec notamment la généralisation du soliton de Townes. Cependant, comme nous l'avons entrevu dans la section 3.2.3, si nous voulons étudier précisément la solution non-linéaire auto-cohérente, l'approximation scalaire n'est plus valable. En effet, pour la fibre optique microstructurée, l'approximation du guidage faible n'est plus respectée puisque le contraste d'indice est de l'ordre de 50% dans le cas linéaire. De plus, l'effet non-linéaire engendre une modulation de l'indice de réfraction dans la fibre accentuant ce contraste d'indice. Dans cette perspective, nous implémenterons dans ce chapitre le problème vectoriel complet—sans approximations. Nous verrons que sur le plan numérique, les phénomènes restent comparables au cas scalaire. Sur le plan des propriétés physiques, nous étudierons en particulier les différences sur les caractéristiques du soliton spatial qu'entraîne le passage au modèle vectoriel.

5.1 Approximation scalaire liée au guidage faible

Lorsque nous écrivons l'équation d'onde de type Helmholtz (2.9), nous négligeons le terme $\nabla \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_r}{\epsilon_r} \right)$ (voir section 2.1.2) sous prétexte que l'indice optique est homogène sur un domaine spatial précis [9]. Cependant, la présence d'une non-linéarité entraîne une modulation de l'indice de réfraction. De plus, l'étude de la fibre optique microstructurée nous amène, même dans le cas linéaire, à prendre en compte un contraste d'indice fort sortant largement du cadre du guidage faible. Dans ce cas, le terme $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ peut-il toujours être réduit à $\Delta \mathbf{E}$?

Marcuse[9] a démontré que *cette approximation n'est valide que si la variation de l'indice optique est négligeable sur une distance d'une longueur d'onde*. D'un point de vue quantitatif, nous posons :

$$R = \frac{n_{\max} - n_{\min}}{n_{\min}} \quad (5.1)$$

où R représente la variation relative entre l'indice de réfraction maximum n_{\max} et minimum n_{\min} sur une distance d'une longueur d'onde.

☛ **Approximation :** Si $R \ll 1$ sur une distance d'une longueur d'onde alors nous pouvons dire que la variation de l'indice optique est négligeable sur une distance d'une longueur d'onde et dans ce cas, le terme $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ peut être simplifié.

La figure 5.1 montre la modulation de l'indice de réfraction engendrée par l'effet non-linéaire suivant une coupe transverse des fibres optiques à saut d'indice et microstructurée. L'indice de réfraction étant défini comme $n = \sqrt{\epsilon_r}$, nous représentons sur la figure 5.1 son profil pris par exemple suivant l'axe $0x$ tel que :

$$n(x) = \sqrt{n_0^2(x) + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\chi \psi(x)|^2} \quad (5.2)$$

où n_0^2 est l'indice linéaire dans la fibre optique, $\mathbb{1}_{\text{nl}}$ la fonction indicatrice égale à 1 dans le milieu non-linéaire et 0 dans le milieu linéaire.

Nous remarquons que dans le cas non-linéaire, l'hypothèse de Marcuse n'est plus respectée pour les deux types de fibres optiques. Pour les configurations représentées par la figure 5.1, $R \approx 0.08$ pour la fibre à saut d'indice (FIG. 5.1(a)) et $R \approx 0.1$ pour la fibre optique microstructurée (FIG. 5.1(b)) sur une distance d'une longueur d'onde.

Il est donc nécessaire de mettre au point un modèle vectoriel complet, ce qui constitue l'objet de ce chapitre. Le passage à ce nouveau modèle nous permettra de décrire au mieux le problème non-linéaire.

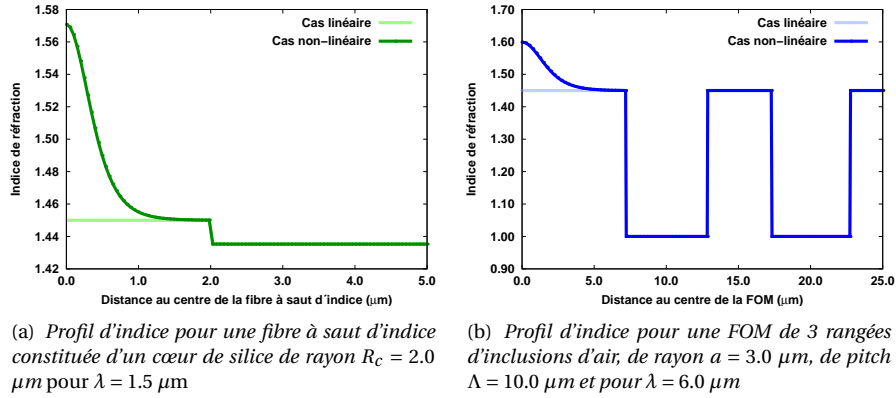


FIGURE 5.1 – Comparaison des profils de l'indice de réfraction pour le mode fondamental linéaire et pour la solution non-linéaire auto-cohérente suivant une coupe transverse dans le cas des fibres optiques à saut d'indice et microstructurée.

✎ **Remarque importante 23 :** Dans la section 3.2.3 et en particulier pour la figure 3.6, nous avons comparé les résultats linéaires scalaires de la MEF et vectoriels de la MM. Nous avons remarqué que la différence entre les configurations scalaire et vectorielle était importante, même dans le cas linéaire. En effet, le contraste d'indice entre la matrice et les trous d'air dans les FOMs que nous étudions ne respecte pas l'approximation du guidage faible. Ainsi, dans le cas de la FOM, deux phénomènes justifient des différences entre scalaire et vectoriel :

- le contraste d'indice dû à la structure de la FOM (matrice de silice et inclusions d'air)
- le contraste d'indice engendré par l'effet Kerr optique

5.2 L'équation non-linéaire vectorielle et formulation faible associée

Comme nous pouvons l'imaginer, l'obtention de la formulation faible vectorielle est sensiblement plus compliquée que dans l'approche scalaire puisqu'il faut prendre en compte les trois composantes du champ E . Nous allons donc expliciter chaque étape de calcul afin de bien comprendre les différentes techniques utilisées.

5.2.1 Obtention de l'équation non-linéaire vectorielle

Comme nous l'avons évoqué dans la section 1.4, nous considérons la présence d'une unique non-linéarité : l'effet Kerr optique. Dans ce cas, l'équation de Helm-

hertz vectorielle non-linéaire que nous voulons résoudre dans les fibres optiques est l'équation (1.30) rappelée ici

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} n_{Kerr}^2 |\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad (5.3)$$

où $\mathbb{1}_{nl}$ correspond à la fonction indicatrice égale à 1 dans le milieu non-linéaire et 0 dans le milieu linéaire et où les solutions recherchées sont de la forme

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{e}_z) e^{i\beta z - i\omega t}. \quad (5.4)$$

Ainsi, le champ électrique \mathbf{E} tient compte des trois composantes : deux transverses selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y constituant le champ \mathbf{E}_t tel que $\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{e}_z = 0$ et une longitudinale $E_z \mathbf{e}_z$. Comme pour le cas scalaire, les amplitudes des champs \mathbf{E}_t et $E_z \mathbf{e}_z$ dépendent des coordonnées transverses x et y . Enfin, le terme en exponentiel complexe fait intervenir la coordonnée longitudinale z ainsi que le terme de propagation β .

5.2.2 Détermination de la formulation faible associée

La présence des trois composantes du champ électrique complique la détermination de la formulation faible associée à l'équation vectorielle (5.3).

□ Calcul préliminaire

La première étape consiste à calculer

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{E}_t e^{i\beta z} + E_z e^{i\beta z} \mathbf{e}_z). \quad (5.5)$$

Or, nous connaissons la relation suivante

$$\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a}. \quad (5.6)$$

➤ Pour la composante transverse :

En utilisant l'équation (5.6) pour la composante transverse, il vient

$$\nabla \times (\mathbf{E}_t e^{i\beta z}) = \underbrace{(\nabla e^{i\beta z})}_{\text{selon } \mathbf{e}_z} \times \mathbf{E}_t + e^{i\beta z} \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}_t}_{\text{selon } \mathbf{e}_t} \quad (5.7)$$

avec $\nabla e^{i\beta z} = i\beta e^{i\beta z} \mathbf{e}_z$ et où la constante de propagation β est une grandeur complexe. En effet, nous savons que dans le cadre de l'étude *linéaire* de la fibre optique microstructurée, les modes sont à pertes. Les grandeurs comme la constante de

propagation β présentent donc une partie imaginaire non nulle. De l'équation (5.7) il vient alors

$$\nabla \times (\mathbf{E}_t e^{i\beta z}) = e^{i\beta z} [\nabla_t \times \mathbf{E}_t + i\beta \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t]. \quad (5.8)$$

L'équation (5.8) nous conduit à définir l'opérateur $\nabla_\beta = (\partial_x, \partial_y, i\beta)$. Il s'agit simplement de l'opérateur $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ où la composante ∂_z est explicitée par le terme $i\beta$ ce qui nous permet de prendre en compte le fait que $\beta \in \mathbb{C}$:

$$\nabla_\beta = \nabla_t + i\beta \mathbf{e}_z. \quad (5.9)$$

➤ **Pour la composante longitudinale :**

Concernant la composante longitudinale, l'expression (5.6) permet d'écrire

$$\nabla \times (E_z e^{i\beta z} \mathbf{e}_z) = \nabla_t \times (E_z e^{i\beta z} \mathbf{e}_z) = \nabla_t E_z e^{i\beta z} \times \mathbf{e}_z + E_z e^{i\beta z} \underbrace{\nabla_t \times \mathbf{e}_z}_{=0} \quad (5.10)$$

ou encore

$$\nabla \times (E_z e^{i\beta z} \mathbf{e}_z) = e^{i\beta z} \nabla_t E_z \times \mathbf{e}_z \quad (5.11)$$

Au final, en utilisant les équations (5.5), (5.8) et (5.11) nous obtenons

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = \nabla_\beta \times \mathbf{E} = e^{i\beta z} [\nabla_t \times \mathbf{E}_t + (\nabla_t E_z - i\beta \mathbf{E}_t) \times \mathbf{e}_z]}. \quad (5.12)$$

□ **Détermination de la formulation faible vectorielle**

L'obtention de l'équation (5.12) est un préliminaire à la détermination de la formulation faible. Comme dans le cas scalaire (section 2.2.2), pour définir la formulation faible du problème nous multiplions l'équation (5.3) par la fonction de pondération conjuguée $\overline{\mathbf{E}'}$ et nous intégrons sur l'ensemble de la section transverse F de la fibre

$$\int_F \nabla_\beta \times (\nabla_\beta \times \mathbf{E}) \cdot \overline{\mathbf{E}'} dS - \int_F k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} dS = 0, \quad \forall \overline{\mathbf{E}'} \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^3. \quad (5.13)$$

Pour réaliser l'intégration par partie, nous utilisons la formule de Leibniz modifiée [32]

$$\nabla_t \cdot (\mathbf{a} \times \overline{\mathbf{b}}) = \overline{\mathbf{b}} \cdot (\nabla_\beta \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\overline{\nabla_\beta \times \mathbf{b}}), \quad \forall \beta \in \mathbb{C} \quad (5.14)$$

ainsi que le théorème d'Ostrogradski

$$\int_F \nabla_t \cdot (\mathbf{a} \times \overline{\mathbf{b}}) dS = \oint_{\partial F} (\mathbf{a} \times \overline{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{n} dl \quad (5.15)$$

où F représente la surface transverse de la fibre, ∂F son contour et \mathbf{n} un vecteur unitaire normal au contour. Si nous posons $\mathbf{a} = \nabla_{\beta} \times \mathbf{E}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{E}'$ (fonction de pondération), nous obtenons par simple substitution

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial F} [(\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}) \times \overline{\mathbf{E}'}] \cdot \mathbf{n} dl \\ &= \int_F [\nabla_{\beta} \times (\nabla_{\beta} \times \mathbf{E})] \cdot \overline{\mathbf{E}'} dS - \int_F (\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot (\overline{\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}'}) dS, \quad \forall \mathbf{E}' \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^3 \end{aligned} \quad (5.16)$$

☞ **Hypothèse 8 :** Nous supposons que le champ est nul sur le bord de la fibre. Ceci est possible car :

- dans la fibre à saut d'indice, le mode fondamental est un mode guidé (sans pertes)
- dans la fibre optique microstructurée, le mode fondamental est à perte avec l'application d'une région périphérique absorbante ou une PML (modèle numérique modifié).

Cependant, dans le problème physique (modèle réel), les modes dans la FOM sont à pertes et donc le champ n'est pas nul sur le bord de la fibre.

Dans le cadre de notre modèle numérique modifié, le membre de gauche de l'équation (5.16) disparaît. Nous obtenons alors à partir de l'équation (5.13), la formulation faible du problème (5.3)

$$\boxed{\int_F (\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot (\overline{\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}'}) dS = k_0^2 \int_F \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} dS, \quad \forall \mathbf{E}' \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^3} \quad (5.17)$$

D'après l'équation (5.12), nous pouvons développer le membre de gauche de la formulation faible (5.17)

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot (\overline{\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}'}) = \\ & \left[\underbrace{\nabla_t \times \mathbf{E}_t}_{\text{selon } \mathbf{e}_z} + \underbrace{\nabla_t E_z \times \mathbf{e}_z}_{\text{selon } \mathbf{e}_t} - \underbrace{i\beta \mathbf{E}_t \times \mathbf{e}_z}_{\text{selon } \mathbf{e}_t} \right] \cdot \left[\underbrace{\nabla_t \times \overline{\mathbf{E}'_t}}_{\text{selon } \mathbf{e}_z} + \underbrace{\nabla_t \overline{E'_z} \times \mathbf{e}_z}_{\text{selon } \mathbf{e}_t} + \underbrace{i\beta \overline{\mathbf{E}'_t} \times \mathbf{e}_z}_{\text{selon } \mathbf{e}_t} \right]. \end{aligned}$$

En développant l'expression précédente, nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}) \cdot (\overline{\nabla_{\beta} \times \mathbf{E}'}) = (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) \cdot (\nabla_t \times \overline{\mathbf{E}'_t}) + (\nabla_t E_z \times \mathbf{e}_z) \cdot (\nabla_t \overline{E'_z} \times \mathbf{e}_z) \\ & \quad + i\beta (\nabla_t E_z \times \mathbf{e}_z) \cdot (\overline{\mathbf{E}'_t} \times \mathbf{e}_z) - i\beta (\mathbf{E}_t \times \mathbf{e}_z) \cdot (\nabla_t \overline{E'_z} \times \mathbf{e}_z) \\ & \quad + \beta \overline{\beta} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{e}_z) \cdot (\overline{\mathbf{E}'_t} \times \mathbf{e}_z), \\ & \quad \forall (\overline{\mathbf{E}'_t}, \overline{E'_z}) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nous arrivons finalement à la formulation faible de l'équation vectorielle 5.3 que nous devons résoudre numériquement

$$\begin{aligned} & \int_F \left((\nabla_t \times E_t) \cdot (\nabla_t \times \overline{E'_t}) + \nabla_t E_z \cdot \nabla_t \overline{E'_z} \right) dS \\ & + \int_F \left(i\beta \nabla_t E_z \cdot \overline{E'_t} - i\beta E_t \cdot \nabla_t \overline{E'_z} + \beta^2 E_t \cdot \overline{E'_t} \right) dS = k_0^2 \int_F \epsilon_r \left(E_t \cdot \overline{E'_t} + E_z \overline{E'_z} \right) dS, \quad (5.19) \\ & \forall (\overline{E'_t}, \overline{E'_z}) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F). \end{aligned}$$

L'équation (5.19) fait apparaître deux termes en $i\beta$ et un en β^2 . Comme pour l'approche scalaire, nous nous plaçons dans le cas où nous fixons k_0 (représentant la longueur d'onde λ) et nous cherchons les valeurs propres β correspondant à la constante de propagation. Pour simplifier l'expression et permettre sa résolution numérique avec le logiciel GetDP¹, nous allons transformer l'expression qui contient les termes $i\beta$ et β^2 en une expression ne contenant que des termes en β^2 . De cette manière, nous obtiendrons un problème aux valeurs propres en β^2 pour l'implémentation du processus itératif de Picard.

Pour cela, nous posons

$$F_t = E_t, \quad (5.20)$$

$$F_z e_z = \frac{1}{i\beta} E_z e_z \quad \text{et} \quad \overline{F'_z} e_z = \frac{1}{-i\beta} \overline{E'_z} e_z \quad (5.21)$$

En utilisant ces changements de variables dans le problème 5.19, il vient

$$\begin{aligned} & \int_F \left((\nabla_t \times F_t) \cdot (\nabla_t \times \overline{F'_t}) - k_0^2 \epsilon_r F_t \cdot \overline{F'_t} \right) dS \\ & = \beta^2 \int_F \left(-F_t \cdot \overline{F'_t} + \nabla_t F_z \cdot \overline{F'_t} + F_t \cdot \nabla_t \overline{F'_z} - \nabla_t F_z \cdot \nabla_t \overline{F'_z} + k_0^2 \epsilon_r F_z \overline{F'_z} \right) dS, \quad (5.22) \\ & \forall (\overline{F'_t}, \overline{F'_z}) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F). \end{aligned}$$

Nous aboutissons donc à un système réel et symétrique [17] ne prenant en compte que des termes en β^2 . Il s'agit bien d'un système où nous cherchons les valeurs de β^2 à k_0^2 fixé (ou λ fixée). C'est la formulation faible que nous allons implémenter pour étudier la non-linéarité dans les fibres optiques à saut d'indice et microstructurée.

1. Les problèmes aux valeurs propres généralisées contenant des expressions de la valeur propre complexe en monôme d'ordre 1 et 2 sont numériquement plus ardues à résoudre que les problèmes où le carré de la valeur propre intervient.

5.2.3 Application de la MEF au cas vectoriel

Nous pouvons alors présenter de manière succincte l'application de la Méthode des Éléments Finis dans l'approche vectorielle dont la détermination de la formulation faible (5.22) était un préalable.

Comme pour le cas scalaire (voir section 2.2.3), nous transformons la formulation variationnelle sous forme matricielle dont les coefficients sont définis tels que

$$a_{ij}^{tt} = \int_F (\nabla_t \times \mathbf{F}_t) \cdot (\nabla_t \times \overline{\mathbf{F}}_t') d\Omega \quad , \quad a_{ij}^{zz} = \int_F \nabla_t F_z \cdot \nabla_t \overline{F}_z' dS \quad ,$$

$$a_{ij}^{zt} = \int_F \nabla_t F_z \cdot \overline{\mathbf{F}}_t' dS \quad , \quad a_{ij}^{tz} = \int_F \mathbf{F}_t \cdot \nabla_t \overline{F}_z' dS \quad ,$$

$$b_{ij}^{tt} = \int_F \mathbf{F}_t \cdot \overline{\mathbf{F}}_t' dS \quad ,$$

$$c_{ij}^{tt} = \int_F \epsilon_r \mathbf{F}_t \cdot \overline{\mathbf{F}}_t' dS \quad \text{et} \quad c_{ij}^{zz} = \int_F \epsilon_r F_z \overline{F}_z' dS.$$

où i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne de la matrice A représentant l'équation (5.22) sous forme algébrique. Nous obtenons alors le système suivant :

$$\begin{pmatrix} a^{tt} + \beta^2 b^{tt} & -\beta^2 a^{zt} \\ -\beta^2 a^{tz} & \beta^2 a^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^t \\ f^z \end{pmatrix} = k_0^2 \begin{pmatrix} c^{tt} & 0 \\ 0 & \beta^2 c^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^t \\ f^z \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

où f^t et f^z représente les vecteurs colonnes des degrés de liberté associés au champ approximé transverse \mathbf{F}_t

$$\mathbf{F}_t = \sum_{j=1}^{\text{arêtes}} f_j^t \boldsymbol{\alpha}_j^t \quad (5.24)$$

et au champ approximé longitudinal F_z

$$F_z = \sum_{j=1}^{\text{nœuds}} f_j^z \alpha_j^z. \quad (5.25)$$

Comme pour le cas scalaire, nous choisissons les bases $\{\boldsymbol{\alpha}_j\}_{j=1}^{j=\text{arêtes}}$ et $\{\alpha_j\}_{j=1}^{j=\text{nœuds}}$ qui représentent les fonctions de forme sur lesquelles sont projetées respectivement les solutions approximées \mathbf{E}_t et E_z . Les valeurs f_j^t et f_j^z sont respectivement

les valeurs du champ transverse et longitudinal au nœud j . La figure 5.2 montre les fonctions de forme α_j^t définies sur les arêtes des triangles et les fonctions de forme α_j^z définies sur les nœuds.

L'affectation des fonctions de forme nodales se fait de manière intuitive. Par exemple, la fonction de forme α_j^z est associée au nœud j . Le degré de liberté ou facteur de pondération est naturellement f_j^z .

En revanche, l'affectation des fonctions de forme sur les arêtes se fait de manière arbitraire. En effet, pour l'arête liant les nœuds j et k , nous choisissons arbitrairement le nom et le sens de la fonction de forme que nous appelons ici α_j^t . Le degré de liberté ou facteur de pondération associé à α_j^t est naturellement f_j^t . Le point important est que l'affectation soit *cohérente* avec les éléments environnants.

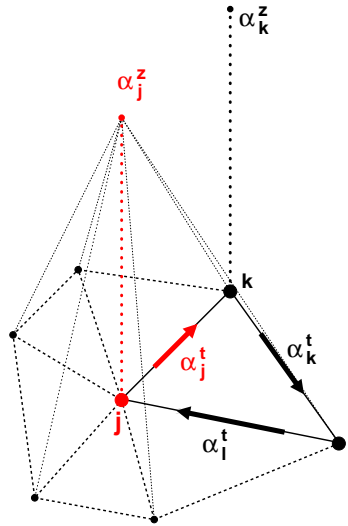


FIGURE 5.2 – Fonctions de forme utilisées dans la configuration vectorielle.

Comme pour le cas scalaire, la fonction α_j^z est interpolée linéairement entre le nœud j et les nœuds voisins. Elle est égale à 1 sur le nœud j et à 0 sur les autres nœuds du domaine. Pour les éléments d'arêtes, le vecteur α_j^t est tangentiel à l'arête d'un triangle dont l'un des sommet est le nœud j . Les éléments d'arêtes (associés aux éléments nodaux) permettent donc de modéliser le champ électromagnétique \mathbf{E} suivant ses trois composantes dans un problème à deux dimensions. L'une de leurs principales propriétés est que l'approximation du champ correspondante à une composante tangentielle est continue à travers un élément au bord [17, 68]. La composante normale est quant à elle discontinue d'un élément à un autre.

Si nous notons \mathbf{u}_j un vecteur unitaire tangent à l'arête j (une arête passant par

le nœud j) alors nous avons [68]

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{F}_t = \frac{f_j^t}{L_i} \quad (5.26)$$

où L_i est la longueur de l'arête j . En d'autres termes, f_j^t contrôle le champ tangentiel sur l'arête j .

Ainsi, le système (5.23), modélisé par la Méthode des Éléments Finis où les éléments présentés précédemment sont utilisés, constitue un système creux qui peut être résolu par une méthode d'Arnoldi (voir section 2.4.3). Comme pour l'approche scalaire, celui-ci sera résolu dans GetDP par la fonction `Eigenolve` dont une description est donnée dans la documentation du solveur.

Nous pouvons maintenant présenter puis implémenter l'algorithme vectoriel permettant la résolution d'une non-linéarité Kerr optique dans les fibres à saut d'indice et microstructurée.

5.3 L'algorithme auto-cohérent dans le cas vectoriel

La première étape consiste à déterminer le coefficient χ permettant la renormalisation cohérente du champ à injecter dans le terme non-linéaire au cours du processus itératif. Le principe du calcul se base sur celui réalisé dans le cas scalaire de la section 2.3.2.

Tout d'abord, nous considérons l'équation (5.3) rappelée ici

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} n_{\text{Kerr}}^2 |\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad (5.27)$$

Puis, nous posons par analogie avec la configuration scalaire et pour $n_{\text{Kerr}} > 0$

$$\mathbf{E} = \frac{\chi}{n_{\text{Kerr}}} \tilde{\mathbf{E}}. \quad (5.28)$$

Ce changement de variable est utilisé dans l'équation (5.27) où χ est une constante représentant l'amplitude du champ électrique $\tilde{\mathbf{E}}$. L'équation (5.27) devient alors à l'étape i du processus itératif

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_i) = k_0^2 \underbrace{\left(n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\chi_i \tilde{\mathbf{E}}_i|^2 \right)}_{\epsilon_{r,i}} \tilde{\mathbf{E}}_i \quad (5.29)$$

où $\tilde{\mathbf{E}}_i$ est le champ électrique $\tilde{\mathbf{E}}$ à l'étape i et χ_i l'amplitude associée au champ $\tilde{\mathbf{E}}_i$. C'est l'équation non-linéaire que nous voulons résoudre. L'équation linéarisée à résoudre numériquement par la méthode itérative de Picard est donc

$$\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}_i) = k_0^2 \underbrace{\left(n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\chi_{i-1} \tilde{\mathbf{E}}_{i-1}|^2 \right)}_{\epsilon_{r,i-1}} \tilde{\mathbf{E}}_i \quad (5.30)$$

où $\chi_{i-1} \tilde{\mathbf{E}}_{i-1}$ est la solution connue issue de la résolution numérique de l'équation à l'étape $i-1$.

✎ **Remarque importante 24 :** Nous choisissons d'utiliser la même renormalisation sur toutes les composantes du champ électrique comme le montre l'équation (5.30). Les composantes $\mathbf{E}_{t,i}$ et $E_{z,i} \mathbf{e}_z$ sont donc renormalisées pas le coefficient χ_i . Ce choix est cohérent puisque la solution injectée dans le terme non-linéaire à chaque étape d'itération est le champ électrique global.

Nous construisons alors un résidu pondéré à partir des équations (5.29) et (5.30) en utilisant la relation (5.19). Comme nous résolvons l'expression (5.22) dans le solveur GetDP, nous considérons les champs \mathbf{F}_t et $F_z \mathbf{e}_z$ pour les équations précédentes. Les fonctions de pondération sont les solutions \mathbf{F}_t et F_z elles-mêmes de façon à minimiser l'erreur là où le champ est le plus important. Dans ces conditions, nous avons $\overline{\mathbf{F}}'_t = \overline{\mathbf{F}}_t$ et $\overline{F}'_z = \overline{F}_z$ où $\mathbf{F}_t \overline{\mathbf{F}}_t = |\mathbf{F}_t|^2$ et $F_z \overline{F}_z = |F_z|^2$.

D'après les changements de variables (5.20) et (5.21), nous posons à l'étape i du processus itératif

$$\mathbf{F}_{t,i} = \tilde{\mathbf{E}}_{t,i}, \quad (5.31)$$

$$F_{z,i} \mathbf{e}_z = F'_{z,i} \mathbf{e}_z = \frac{1}{i \beta_i} \tilde{E}_{z,i} \mathbf{e}_z \quad (5.32)$$

et

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \mathbf{F}_{t,i} + i \beta_i F_{z,i} \mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad |\tilde{\mathbf{E}}_i|^2 = |\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2. \quad (5.33)$$

D'après les changements de variables précédents, nous avons à l'étape i de la méthode itérative

$$\epsilon_{r,i} = n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\chi_i|^2 \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) \quad (5.34)$$

et

$$\epsilon_{r,i-1} = n_0^2 + \mathbb{1}_{\text{nl}} |\chi_{i-1}|^2 \left(|\mathbf{F}_{t,i-1}|^2 + |\beta_{i-1}|^2 |F_{z,i-1}|^2 \right) \quad (5.35)$$

Or, si nous utilisons les changements de variables (5.31) et (5.32) (sans les indices i) dans la relation (5.19), il vient :

$$\begin{aligned}
& \int_F \left((\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{F}_{\mathbf{t}}) \cdot (\nabla_{\mathbf{t}} \times \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t}}}) + |\beta|^2 (\nabla_{\mathbf{t}} F_z \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{F_z} - \mathbf{F}_{\mathbf{t}} \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{F_z}) + \beta^2 (\mathbf{F}_{\mathbf{t}} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t}}} - \nabla_{\mathbf{t}} F_z \cdot \overline{\nabla_{\mathbf{t}} F_z}) \right) dS \\
&= k_0^2 \int \epsilon_r \left(\mathbf{F}_{\mathbf{t}} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t}}} + |\beta|^2 F_z \overline{F_z} \right) dS, \\
& \forall (\mathbf{F}_{\mathbf{t}}, \overline{F_z}) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Dans ces conditions, le résidu pondéré associé à l'équation non-linéaire (5.29) est, à l'étape d'itération i de l'algorithme :

$$\begin{aligned}
& \int_F \left((\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{F}_{\mathbf{t},i}) \cdot (\nabla_{\mathbf{t}} \times \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}}) + |\beta_i|^2 (\nabla_{\mathbf{t}} F_{z,i} \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{F_{z,i}} - \mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{F_{z,i}}) \right) dS \\
&+ \beta_i^2 \int_F \left(\mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}} - \nabla_{\mathbf{t}} F_{z,i} \cdot \overline{\nabla_{\mathbf{t}} F_{z,i}} \right) dS = k_0^2 \int \epsilon_{r,i} \left(\mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}} + |\beta_i|^2 F_{z,i} \overline{F_{z,i}} \right) dS, \\
& \forall (\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}, \overline{F_{z,i}}) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F).
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Tandis que le résidu pondéré associé à l'équation non-linéaire (5.30) est à l'étape d'itération i du processus itératif :

$$\begin{aligned}
& \int_F \left((\nabla_{\mathbf{t}} \times \mathbf{F}_{\mathbf{t},i}) \cdot (\nabla_{\mathbf{t}} \times \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}}) + |\beta_i|^2 (\nabla_{\mathbf{t}} F_{z,i} \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{F_{z,i}} - \mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \nabla_{\mathbf{t}} \overline{F_{z,i}}) \right) dS \\
&+ \beta_i^2 \int_F \left(\mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}} - \nabla_{\mathbf{t}} F_{z,i} \cdot \overline{\nabla_{\mathbf{t}} F_{z,i}} \right) dS = k_0^2 \int \epsilon_{r,i-1} \left(\mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}} + |\beta_i|^2 F_{z,i} \overline{F_{z,i}} \right) dS, \\
& \forall (\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}, \overline{F_{z,i}}) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F).
\end{aligned} \tag{5.38}$$

En utilisant les équations (5.37) et (5.38), il vient facilement

$$\begin{aligned}
& k_0^2 \int \epsilon_{r,i} \left(\mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}} + |\beta_i|^2 F_{z,i} \overline{F_{z,i}} \right) dS = k_0^2 \int \epsilon_{r,i-1} \left(\mathbf{F}_{\mathbf{t},i} \cdot \overline{\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}} + |\beta_i|^2 F_{z,i} \overline{F_{z,i}} \right) dS, \\
& \forall (\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}, \overline{F_{z,i}}) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

La simplification des termes en complexe conjugué nous permet de réduire cette expression et d'obtenir la relation suivante

$$\int_F \epsilon_{r,i} \left(|\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) dS = \int_F \epsilon_{r,i-1} \left(|\mathbf{F}_{\mathbf{t},i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) dS. \tag{5.40}$$

Les permittivités $\epsilon_{r,i}$ et $\epsilon_{r,i-1}$ sont remplacées respectivement par les équations (5.34) et (5.35), ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
& \int_K |\chi_i|^2 \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) dS \\
&= \int_K |\chi_{i-1}|^2 \left(|\mathbf{F}_{t,i-1}|^2 + |\beta_{i-1}|^2 |F_{z,i-1}|^2 \right) \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) dS
\end{aligned} \tag{5.41}$$

où K représente la région dans laquelle est présent l'effet Kerr optique. Notons que la valeur de χ_{i-1} est déterminée lors de l'étape d'itération précédente. L'expression (5.41) peut alors se simplifier

$$\begin{aligned}
& \int_K |\chi_i|^2 \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right)^2 dS \\
&= \int_K |\chi_{i-1}|^2 \left(|\mathbf{F}_{t,i-1}|^2 + |\beta_{i-1}|^2 |F_{z,i-1}|^2 \right) \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) dS
\end{aligned} \tag{5.42}$$

et l'expression de $|\chi_i|^2$ est ainsi, facilement déduite

$$\boxed{|\chi_i|^2 = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}} \tag{5.43}$$

où les termes \mathcal{N} et \mathcal{D} sont définis tels que :

$$\mathcal{N} = \int_K |\chi_{i-1}|^2 \left(|\mathbf{F}_{t,i-1}|^2 + |\beta_{i-1}|^2 |F_{z,i-1}|^2 \right) \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right) dS$$

et

$$\mathcal{D} = \int_K \left(|\mathbf{F}_{t,i}|^2 + |\beta_i|^2 |F_{z,i}|^2 \right)^2 dS$$

Dans le cas où nous revenons à l'expression en champ \mathbf{E} (avec les changements de variables (5.31) et (5.32)), le coefficient de renormalisation $|\chi_i|^2$ s'écrit tel que

$$\mathcal{N} = \int_K |\chi_{i-1}|^2 \left(|\mathbf{E}_{t,i-1}|^2 + |E_{z,i-1}|^2 \right) \left(|\mathbf{E}_{t,i}|^2 + |E_{z,i}|^2 \right) dS$$

et

$$\mathcal{D} = \int_K \left(|\mathbf{E}_{t,i}|^2 + |E_{z,i}|^2 \right)^2 dS$$

Nous pouvons à présent exposer l'algorithme SC_{Lin1D} vectoriel (figure 5.3). Le principe de cet algorithme est naturellement le même que dans le cas scalaire (figure 3.13), il n'y a que les équations et le coefficient χ_i qui sont remplacés par leur équivalent vectoriel.

Le principe est le suivant :

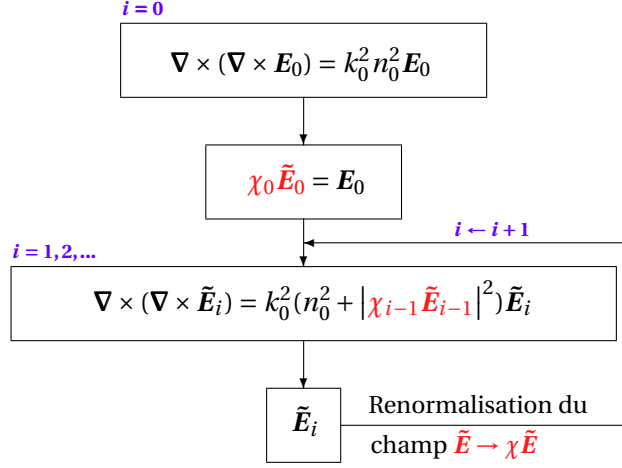


FIGURE 5.3 – Principe de l’algorithme SC_{Lin1D} vectoriel. Le balayage en amplitude χ_0 est réalisé à l’issue de la résolution du problème linéaire de l’étape $i = 0$.

- ❶ À l’étape $i = 0$, le problème linéaire vectoriel est résolu à une longueur d’onde donnée (à travers le vecteur d’onde k_0) et nous obtenons le champ E_0 .
- ❷ Comme le champ E_0 est solution de l’équation linéaire, alors le champ $\chi_0 E_0$ (défini par la relation (5.28)) est aussi solution. Nous fixons une valeur de l’amplitude χ_0 et nous injectons à l’étape $i = 1$ le champ $\chi_0 E_0$ dans le terme non-linéaire.
- ❸ Le processus itératif de Picard est lancé jusqu’à l’obtention du point fixe (où la convergence est atteinte).
- ❹ Le résidu est calculé à la convergence du processus itératif pour la valeur de l’amplitude χ_0 d’entrée.
- ❺ Nous recommençons à partir de ❷

L’étude de la valeur du résidu (se reporter à la section 5.5) nous permet alors de vérifier ou non l’existence d’une solution non-linéaire auto-cohérente correspondant au minimum de résidu.

5.4 Validation de la méthode : étude du cas linéaire

Comme dans le cadre de l’étude scalaire (section 3.2), la première étape est l’étude du problème linéaire vectoriel. Celle-ci va nous permettre de valider notre méthode numérique et notamment la formulation faible (relation (5.22)) que nous avons implémentée. Nous rappelons que l’équation (5.3) est à résoudre dans ce cas.

5.4.1 Comparaison des méthodes FFF-MS et des Éléments Finis

À l'aide de la méthode FFF-MS, nous allons vérifier les résultats obtenus pour la fibre à saut d'indice dans le cas linéaire vectoriel avec la Méthode des Éléments Finis (figure 5.4). Comme nous l'avons vu dans la section 3.2.1, la méthode FFF-MS est une méthode vectorielle ce qui nous permet de réaliser une comparaison précise avec la MEF vectorielle et donc de valider la formulation faible (5.22) dans une géométrie simple.

La fibre à saut d'indice est constituée d'un cœur de silice de rayon $R_c = 2.0 \mu\text{m}$ et entourée d'une gaine "infinie" d'indice de réfraction $n_{0,gaine} = 1.435$. Comme pour le cas scalaire, nous nous plaçons dans l'approximation du guidage faible pour se concentrer sur la validation de la méthode numérique vectorielle.

Dans cette fibre, le mode fondamental est un mode guidé (la partie imaginaire de l'indice effectif est nulle) c'est-à-dire sans pertes, par conséquent nous n'utilisons pas de PMLs dans cette structure.

La figure 5.4 montre que les deux méthodes vectorielles donnent des indices effectifs très proches suivant la longueur d'onde λ . Ainsi, cette étape nous permet de montrer que la formulation faible (équation (5.22)) et plus généralement la méthode numérique utilisée dans le cas linéaire sont fiables.

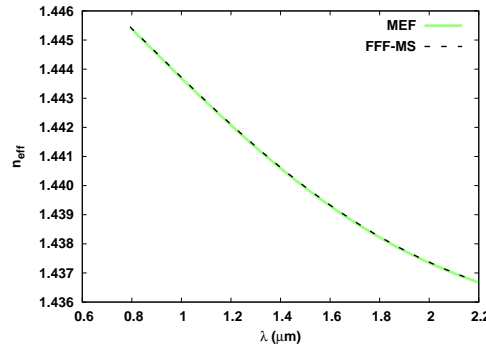


FIGURE 5.4 – Comparaison de l'indice effectif pour la MEF et la FFF-MS dans la fibre à saut d'indice pour l'approche vectorielle complète linéaire. La fibre à saut d'indice a un cœur de silice de rayon $R_c = 2.0 \mu\text{m}$ et dont le contraste d'indice respecte l'approximation du guidage faible.

Le tableau 5.1 montre que l'écart relatif Δ_{lin} entre la valeur de l'indice effectif donnée par la méthode FFF-MS et celle fournie par la MEF est de l'ordre de 10^{-6} ce qui valide précisément la méthode.

	FFF-MS	MEF	Δ_{lin}
n_{eff}	1.438002534	1.437991	8.02091×10^{-6}

TABLE 5.1 – Comparaison des valeurs de l'indice effectif données par la méthode FFF-MS et la MEF pour une fibre optique à saut d'indice de rayon de cœur $R_c = 2.0 \mu m$ pour $\lambda = 1.85 \mu m$.


5.4.2 Comparaison des méthodes Multipolaire et MEF avec PML

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2.3, la méthode multipolaire est une méthode où une part importante des calculs est effectuée analytiquement et donnant des résultats très précis dans le cas vectoriel. Ceci permet de faire une comparaison quantitative des résultats fournis par la Méthode des Éléments Finis dans cette approche et dans les FOMs. Pour cela, nous considérons une fibre optique microstructurée dans laquelle le pitch $\Lambda = 2.3 \mu m$, le rayon des inclusions d'air $a = 0.5 \mu m$ et l'indice de réfraction linéaire $n_0 = 1.4439035654$ [20]. Dans ce cas, nous ne sommes plus dans l'approximation du guidage faible.

Pour le calcul des pertes, nous utilisons des PMLs vectorielles circulaires dont une analyse basique est réalisée dans l'annexe B. Une fois que les PMLs ont été optimisées, les résultats obtenus dans le cas vectoriel linéaire avec une PML sont comparés avec ceux obtenus par la Méthode Multipolaire dans la fibre optique microstructurée.

La première étude concerne l'influence du maillage utilisé pour la modélisation de la fibre (figure 5.5). Dans ce cas, nous utilisons un maillage adaptatif dont le nombre d'éléments augmente pour chaque simulation. Pour la partie réelle de l'indice effectif (figure 5.5(a)), plus le nombre d'éléments augmente, plus la valeur de l'indice effectif se rapproche de celle obtenue avec la Méthode Multipolaire. L'écart relatif Δ entre les deux valeurs est au final de l'ordre de 10^{-5} pour la longueur d'onde étudiée.

Pour la partie imaginaire, nous observons le même phénomène, plus le nombre éléments augmente, plus l'écart relatif entre les valeurs de l'indice effectif est faible ($\Delta = 7.5 \times 10^{-2}$), ce qui est parfaitement cohérent.

 **Remarque 25 :** Si nous effectuons une étude complète des pertes (notamment pour la position de la PML par rapport aux inclusions d'air), nous pouvons améliorer la précision de la partie imaginaire de l'indice effectif obtenue (voir l'annexe B). Sachant que l'effet non-linéaire annule les pertes dans le cas du mode fondamental (voir la section 4.2.3), le but de cette étude est de valider uniquement la méthode numérique pour la configuration linéaire.

La figure 5.6 montre l'évolution des parties réelle et imaginaire de l'indice effectif suivant la longueur d'onde et le nombre de rangées de trous d'air composant la FOM décrite dans cette section.

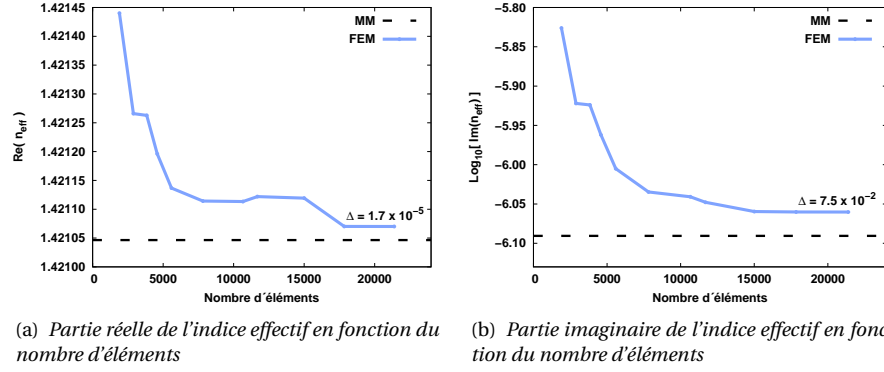


FIGURE 5.5 – Effet du maillage sur l'évaluation des parties réelle et imaginaire de l'indice effectif pour la FOM décrite dans cette section et à $\lambda = 1.56 \mu\text{m}$. Δ est l'écart relatif minimum entre la valeur donnée par la MM et la MEF

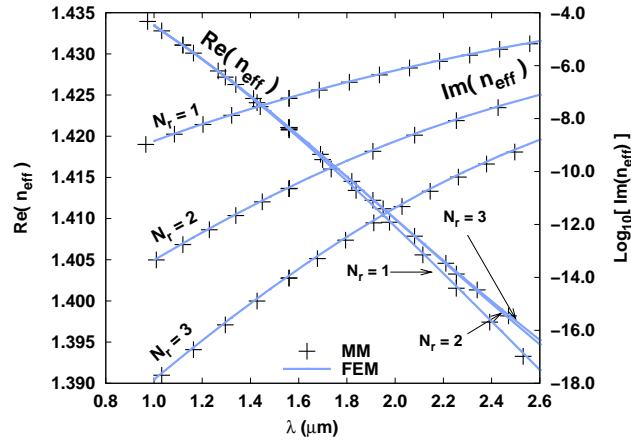


FIGURE 5.6 – Comparaison des parties réelles et imaginaires de l'indice effectif pour la MEF et la Méthode Multipolaire dans la FOM décrite au paragraphe 3.2.3, en fonction de la longueur d'onde. N_r représente le nombre de rangées d'inclusions d'air constituant la FOM.

Nous remarquons que les résultats donnés par la MEF sont très proches de ceux fournis par la Méthode Multipolaire. Pour se rendre compte précisément des différences, le tableau 5.2 illustre les résultats numériques obtenus par les deux méthodes et l'écart relatif Δ associé pour des FOMs d'une, deux et trois couches d'inclusions d'air.

Les résultats montrés par les figures 5.4 et 5.6 et les tableaux 5.1 et 5.2 nous permettent donc de valider notre méthode numérique vectorielle dans le cas linéaire.

		MM	MEF	Δ
$N_r = 1$	$Re(n_{eff})$	1.4207845	1.4208215	2.60×10^{-5}
	$Im(n_{eff})$	7.20952×10^{-4}	7.3389×10^{-4}	1.80×10^{-2}
$N_r = 2$	$Re(n_{eff})$	1.4210361	1.4210576	1.51×10^{-5}
	$Im(n_{eff})$	2.3807×10^{-5}	2.4725×10^{-5}	3.85×10^{-2}
$N_r = 3$	$Re(n_{eff})$	1.4210465	1.4210701	1.66×10^{-5}
	$Im(n_{eff})$	8.118×10^{-7}	8.7287×10^{-7}	7.52×10^{-2}

TABLE 5.2 – Comparaison des valeurs de l'indice effectif données par la Méthode Multipolaire et la MEF pour une fibre optique microstructurée à 2 rangées d'inclusions d'air de diamètre $d = 1.0 \mu\text{m}$, de pitch $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ et pour $\lambda = 1.56 \mu\text{m}$.

Enfin, nous étudions la répartition de champ correspondant au mode fondamental linéaire pour la composante transverse (champ \mathbf{E}_t et son module associé $|\mathbf{E}_t|$) et le module de la composante longitudinale $|E_z|$ du champ électrique (figure 5.7). Pour permettre une comparaison cohérente avec la figure 3.26, nous considérons une FOM à trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 1.5 \mu\text{m}$ et de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$ pour la longueur d'onde $\lambda = 6.0 \mu\text{m}$.

La représentation de la composante longitudinale $|E_z|$ est importante puisque c'est elle qui contient les informations sur les symétries du mode [17, 48, 49]. Ceci nous permet alors de sélectionner le mode d'intérêt (mode fondamental ici) et de réduire le domaine d'étude en appliquant des conditions aux bords adéquates.

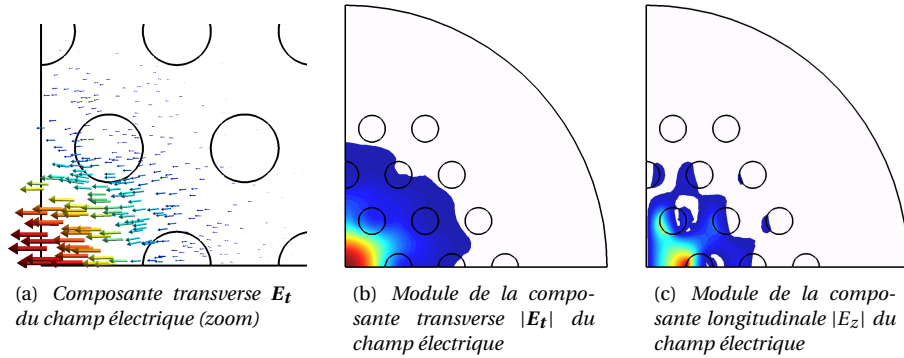


FIGURE 5.7 – Répartition spatiale du champ dans la dimension transverse de la FOM pour la solution issue du problème linéaire suivant la composante transverse \mathbf{E}_t (a), son module $|\mathbf{E}_t|$ associé (b) et pour le module de la composante longitudinale $|E_z|$ (c). La classe de symétrie du mode est ici la troisième ($|E_z| = 0$ sur le bord vertical : classe C_3).

Pour cela, nous savons que le champ vectoriel est approximé dans la MEF par les éléments nodaux et d'arêtes (section 5.2.3). Si nous revenons aux figures 5.2 et

3.4(a), pour obtenir ce mode dans le cas vectoriel, il suffit d'appliquer une condition de Dirichlet explicite (champ nul) sur le bord (1) (pour imposer la symétrie de type C_3) et sur le bord (3) (car le champ est nul au delà de la PML) et de Neumann implicite (dérivée du champ nulle) sur le bord (2).

D'après la définition de la fonction de forme α_j^t tangentielle à une arête passant par le nœud j et appartenant au bord (1), nous pouvons expliquer l'orientation de la composante E_t du champ qui est polarisé rectilignement pour le mode fondamental (figure 5.7(a)). En effet, le fait d'imposer une condition de Dirichlet explicite sur le bord (1) entraîne une orientation du champ E_t orthogonalement au bord (1).

Par comparaison avec les résultats de la Méthode Multipolaire, le champ E_t représenté par la figure 5.7(a) correspond bien à celui du mode fondamental.

Avec ces conditions aux bords, nous pouvons étudier le mode fondamental représenté par la figure 5.7 dans un quart de fibre seulement. Le temps de calcul dans une configuration vectorielle étant nettement supérieur au cas scalaire, la réduction du domaine d'étude et donc du nombre d'éléments est un facteur capital.

5.5 Détermination du soliton spatial vectoriel

Comme dans le cas scalaire (section 3.4.1), nous étudions le résidu obtenu *a posteriori* à la convergence du processus et donné par l'équation (5.22). Dans cette perspective, nous implémentons les algorithmes SC_{Lin1D} et $SC_{Gauss2D}$ dans le cas vectoriel afin de savoir s'il existe, comme dans le cadre de l'approximation scalaire (section 3.4.2), une unique solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle.

Pour cette étude, nous définissons le critère de qualité dans le cas vectoriel qui est d'après la formule du résidu (5.22)

$$\begin{aligned} & \int_F \left((\nabla_t \times F_t) \cdot (\nabla_t \times \overline{F_t'}) - k_0^2 \epsilon_r F_t \cdot \overline{F_t'} \right) dS \\ &= \beta^2 \int_F \left(-F_t \cdot \overline{F_t'} + \nabla_t F_z \cdot \overline{F_t'} + F_t \cdot \nabla_t \overline{F_z'} - \nabla_t F_z \cdot \nabla_t \overline{F_z'} + k_0^2 \epsilon_r F_z \overline{F_z'} \right) dS \stackrel{?}{\rightarrow} 0, \\ & \quad \forall \left(\overline{F_t'}, \overline{F_z'} \right) \in [\mathcal{H}_0^1(F)]^2 \times \mathcal{H}_0^1(F). \end{aligned} \tag{5.44}$$

Dans ces conditions, le résidu défini ci-dessus tend-il vers zéro à la convergence du processus itératif? Si oui, la solution non-linéaire associée à ce minimum est la solution auto-cohérente (β_{coh}, F_{coh}) . Si non, il s'agit d'une solution non-linéaire quelconque. Pour obtenir la solution non-linéaire correspondant au champ électrique E , il suffit d'utiliser les changements de variables (5.31) et (5.32).

5.5.1 Solution du problème linéaire comme point de départ

Si nous considérons comme point de départ la solution issue du problème linéaire alors il s'agit de l'algorithme SC_{Lin1D} présenté par la figure 5.3. Un balayage de l'amplitude χ_0 de la solution injectée est réalisé dans une fibre optique micro-structurée à trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 1.5 \mu\text{m}$ et de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$. La figure 5.8 montre un unique minimum pour chaque configuration.

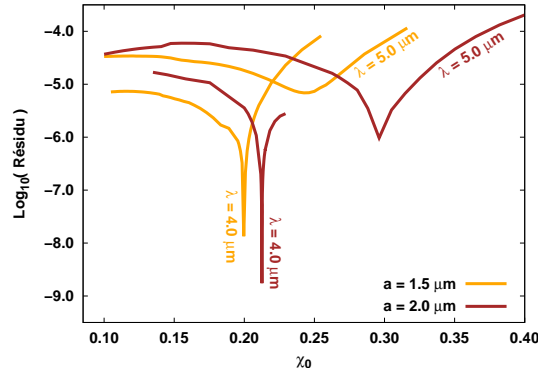


FIGURE 5.8 – Logarithme du résidu en fonction du facteur de renormalisation χ_0 correspondant à l'amplitude de la solution du problème linéaire injectée en entrée de l'algorithme SC_{Lin1D} . Évolution dans une FOM de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$, pour différents rayons a de trous d'air et pour différentes longueurs d'onde.

En comparaison de l'étude scalaire équivalente (figure 3.14 et 3.15), l'évolution du résidu est très sensible au choix du maillage et à la longueur d'onde d'étude. Comme le montre l'évolution du résidu pour un rayon d'inclusion $a = 1.5 \mu\text{m}$ à la longueur d'onde $\lambda = 6.0 \mu\text{m}$, le minimum est moins marqué en comparaison des autres cas. Pour obtenir un minimum plus clair pour cette configuration, nous devons modifier la structure du maillage modélisant la FOM. Ceci montre à quel point l'étude vectorielle est nettement plus complexe que l'approche scalaire.

Cependant, ces résultats montrent aussi qu'à une longueur d'onde fixée et pour une structure donnée, il n'existe qu'une unique solution telle que le résidu est minimum. Ceci confirme dans le cas vectoriel complet les résultats obtenus dans le cadre de l'approximation scalaire (section 3.4.1).

5.5.2 Fonction gaussienne comme point de départ

Comme pour l'approche scalaire, nous généralisons l'algorithme SC_{Lin1D} en injectant des solutions d'amplitudes et de formes différentes. Dans ce cas, nous utilisons l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ en vectoriel. Cependant, il n'existe pas de solution

simple pour définir, implémenter et injecter une fonction gaussienne vectorielle en entrée du processus itératif.

Pour contourner cette difficulté, nous considérons en entrée un problème linéaire où la longueur d'onde est modifiée afin de faire varier la forme de la solution infectée en entrée. Le principe de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ vectoriel est résumé par la figure 5.9.

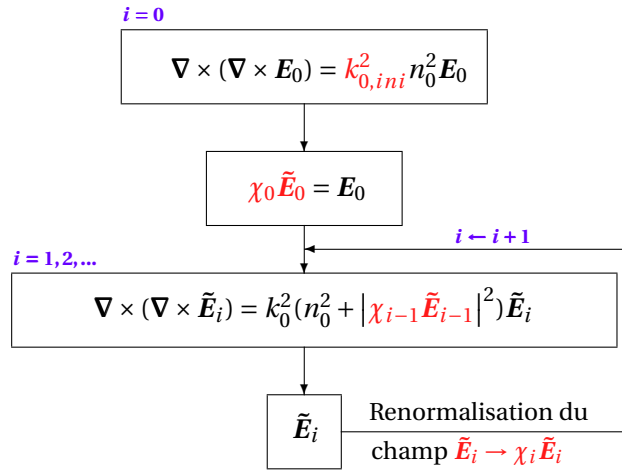


FIGURE 5.9 – Principe de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ vectoriel. La balayage suivant la forme de la solution initiale est réalisé en faisant varier la valeur de $k_{0,ini}^2$ différente de la valeur de k_0^2 à l'intérieur du processus itératif. Le balayage en amplitude χ_0 est réalisé à l'issue de la résolution du problème linéaire de l'étape $i = 0$.

En pratique, pour modifier la forme de la solution d'entrée et pouvoir implémenter l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ vectoriel, nous procédons comme suit :

- ❶ Nous fixons la longueur d'onde d'étude λ (à travers le vecteur d'onde k_0).
- ❷ Pour la résolution du problème linéaire (étape $i = 0$), nous choisissons une longueur d'onde $\lambda_0 \neq \lambda$ (à travers le vecteur d'onde $k_{0,ini}$).
- ❸ Nous choisissons une valeur de χ_0 et nous obtenons le champ représentant la solution linéaire dont les caractéristiques sont définies par le couple (σ_0, χ_0) . Le processus itératif est alors lancé jusqu'à l'obtention du point fixe.
- ❹ Nous effectuons un balayage en amplitude χ_0 pour la solution issue du problème linéaire à la longueur d'onde λ_0 comme pour l'algorithme SC_{Lin1D} (répétition de ❸).
- ❺ Nous recommençons à partir du point ❷.

- ⑥ Nous en déduisons pour chaque couple (σ_0, χ_0) , la valeur du résidu obtenue à la convergence du processus itératif et les caractéristiques finales des solutions non-linéaires $(\sigma_{fin}, \chi_{fin})$.

✎ **Remarque 26 :** Si nous étudions le problème à la longueur d'onde $\lambda_0 = \lambda$, les algorithmes $SC_{Gauss2D}$ et SC_{Lin1D} sont bien évidemment les mêmes.

L'étude de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ est réalisée dans la fibre à saut d'indice dans le but de généraliser au maximum les résultats obtenus dans le cas de l'algorithme SC_{Lin1D} de la section 5.5.1. Le fibre optique modélisée présente un cœur de silice de rayon $R_c = 2.0 \mu\text{m}$ et ayant un effet non-linéaire Kerr optique. Ce cœur est entouré d'une gaine infinie d'indice de réfraction $n_{0,gaine} = 1.435$.

Nous étudions alors le résidu obtenu à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ en fonction des caractéristiques de la solution injectée à l'étape $i = 1$ (figure 5.10).

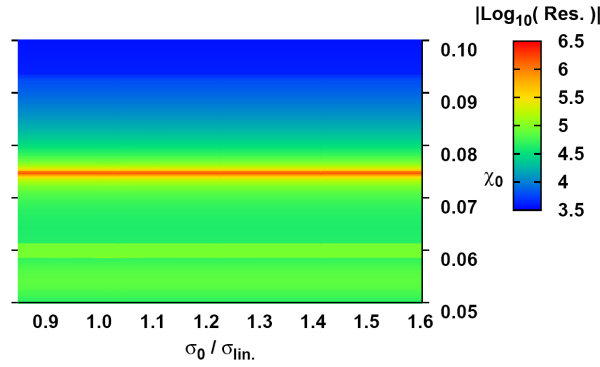


FIGURE 5.10 – Carte de la valeur absolue du logarithme du résidu calculée à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ en fonction des caractéristiques $(\sigma_0 / \sigma_{lin}, \chi_0)$ de la solution injectée en entrée du processus pour une fibre à saut d'indice avec un cœur de silice de rayon $R_c = 2.0 \mu\text{m}$.

Comme pour la configuration scalaire, la figure 5.10 montre une vallée étroite de résidus. Ainsi, pour une valeur de σ_0 , il n'existe qu'une unique amplitude χ_0 du champ électrique pour laquelle le résidu est minimum. Notons qu'il existe un autre minimum correspondant au cas linéaire ($\chi_0 \rightarrow 0$) non représenté sur cette figure.

En outre, l'évolution du résidu est moins uniforme et continue en comparaison de la configuration scalaire (figures 3.17 et 3.21). Ceci s'explique par l'extrême sensibilité du résidu au maillage, aux paramètres opto-géométriques de la fibre optique et à la solution injectée en entrée de l'algorithme dans le cas vectoriel comme nous l'avons évoqué précédemment. Toutefois, la figure 5.10 prouve que la détermination du minimum est parfaitement claire.

Nous pouvons alors nous demander si les solutions non-linéaires obtenues à partir des solutions initiales (correspondant à un résidu minimum à la convergence de $SC_{Gauss2D}$) ne représentent pas une unique solution non-linéaire auto-cohérente.

Pour répondre à cette question, les caractéristiques finales $(\sigma_{fin.}, \chi_{fin.})$ des solutions non-linéaires déduites à partir de l'ensemble des solutions initiales (σ_0, χ_0) doivent être étudiées. La figure 5.11 montre l'évolution du résidu déterminé *a posteriori* en fonction des caractéristiques $(\sigma_{fin.}, \chi_{fin.})$ des solutions non-linéaires obtenues en sortie du processus itératif.

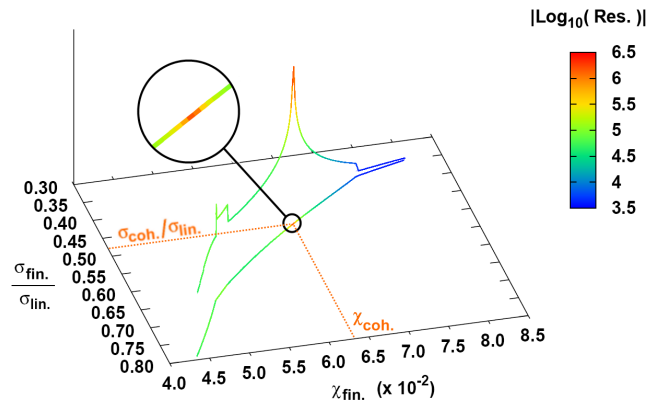


FIGURE 5.11 – Carte de la valeur absolue du logarithme du résidu calculé à la convergence de l'algorithme $SC_{Gauss2D}$ en fonction des caractéristiques finales $(\sigma_{lin.}/\sigma_{lin.}, \chi_{lin.})$ de la solution non-linéaire pour la fibre à saut d'indice décrite dans cette section. Par soucis de clarté, la représentation de la courbe en 3D est accompagnée de sa vue de dessus avec un zoom dans la région du résidu minimum au niveau de la solution non-linéaire auto-cohérente $(\sigma_{coh.}/\sigma_{lin.}, \chi_{coh.})$.

Nous remarquons immédiatement la présence d'un "pic de résidu" prouvant l'existence d'une unique solution non-linéaire auto-cohérente. En outre, nous remarquons quelques imperfections dans l'évaluation du résidu provenant de la sensibilité des calculs dans l'approche vectorielle. Toutefois, le minimum de résidu reste bien marqué.

★ **Point clé :**

Les études scalaire et vectorielle bien que très différentes dans leur formulation, nous montrent des phénomènes en tout point comparables dans le cas de l'étude technique du problème non-linéaire. Ainsi, pour une structure donnée et à une longueur d'onde fixée, nous obtenons une unique solution non-linéaire auto-cohérente. Nous pouvons alors utiliser la version vectorielle de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ pour déterminer de manière optimisée le minimum de résidu et les caractéristiques du soliton spatial vectoriel.

5.6 Implications physiques

Une fois la méthode numérique validée et l'étude technique des solutions non-linéaires réalisée, une étude de la signification physique de la solution non-linéaire auto-cohérente est effectuée. En particulier, nous analyserons l'évolution du soliton spatial vectoriel suivant la longueur d'onde en le comparant à celui obtenu dans l'approximation scalaire. Puis, nous comparerons les résultats fournis par les algorithmes auto-cohérents $SC_{Lin1D-Gold}$ et à puissance fixée FP_{FEM} dans le cas vectoriel.

5.6.1 Nécessité de l'étude du modèle vectoriel

Comme nous l'avons entrevu au moment de la comparaison des solutions linéaires issues des méthodes Multipolaire et Éléments Finis (section 3.2.3), dès que l'approximation du guidage faible n'est plus respectée l'approche scalaire fournit des résultats différents du cas vectoriel complet. Or, d'après la section 5.1, nous savons que l'effet non-linéaire entraîne une modulation importante de l'indice de réfraction. Il est donc intéressant d'étudier l'évolution de la solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle comparée à celle du cas scalaire.

✓ Cas la fibre à saut d'indice

Comme toujours, nous commençons par l'étude de la fibre optique à saut d'indice. Elle présente un cœur de silice de rayon $R_c = 2.0 \mu\text{m}$, ayant un effet non-linéaire Kerr et entouré d'une gaine infinie d'indice de réfraction $n_{0,gaine} = 1.435$. La figure 5.12 donne l'évolution en longueur d'onde du soliton spatial vectoriel obtenu avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ et comparée à celle de la solution non-linéaire auto-cohérente de l'approche scalaire.

Nous remarquons que dans le cas linéaire, les résultats sont identiques car la fibre à saut d'indice modélisée ici respecte l'approximation du guidage faible. Nous avons précédemment montré ces résultats lors de la comparaison avec la méthode FFF-MS (section 3.2.1).

Pour le soliton spatial vectoriel, les différences sont beaucoup plus visibles, ce que nous pouvions prévoir. La modulation d'indice engendrée par l'effet Kerr optique est suffisamment élevée pour sortir de l'approximation du guidage faible.

Enfin, l'écart entre les modèles scalaire et vectoriel diminue avec la longueur d'onde ce qui est cohérent puisque l'effet des inclusions d'air (et donc du contraste d'indice) diminue. Enfin, nous remarquons que l'effet non-linéaire augmente avec la longueur d'onde ce qui indique que l'effet Kerr entre en compétition avec l'effet de la dispersion dans la dimension transverse de la fibre optique.

De plus, l'indice effectif non-linéaire dans l'approche vectorielle est inférieur au cas scalaire sur l'ensemble de la plage de longueur d'onde. Ceci signifie que la

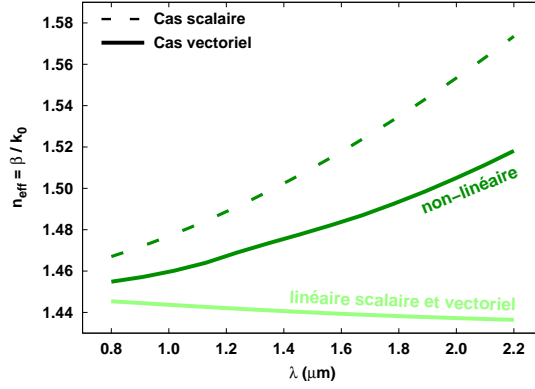


FIGURE 5.12 – Évolution de l'indice effectif linéaire et du soliton spatial vectoriel obtenus avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ en fonction de la longueur d'onde λ pour une fibre à saut d'indice dont le contraste d'indice respecte l'approximation du guidage faible. Comparaison avec l'approche scalaire. Les cas linéaires scalaire et vectoriel sont confondus.

prise en compte des composantes transverses et longitudinales atténue l'effet Kerr optique dans les fibres. En effet, comme le montre la figure 5.13, la modulation de l'indice de réfraction dans le cas vectoriel est moins importante que pour le modèle scalaire.

Notons que pour le cas scalaire, l'indice de réfraction est donné par

$$n = \sqrt{n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} |\chi\psi|^2}. \quad (5.45)$$

Pour la configuration vectorielle,

$$n = \sqrt{n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} |\chi|^2 (|\mathbf{E}_t|^2 + |E_z|^2)}. \quad (5.46)$$

Pour l'approche vectorielle et pour une fibre à saut d'indice constituée d'un cœur de silice de rayon $R_c = 4.0 \mu\text{m}$ pour $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$,

- l'amplitude du champ électrique au carré $|\chi|^2 (|\mathbf{E}_t|^2 + |E_z|^2)$ est moins importante que pour le cas scalaire
- la composante longitudinale a pour effet d'élargir le profil de l'indice de réfraction et par conséquent d'augmenter l'effet de la structure transverse de la fibre comme nous le verrons dans la section 5.6.3.

L'influence de la composante longitudinale est faible mais non négligeable par rapport à la composante transverse puisque pour cette configuration

$$\frac{\text{Max}(|\mathbf{E}_t|)}{\text{Max}(|E_z|)} \approx 8 \quad (5.47)$$

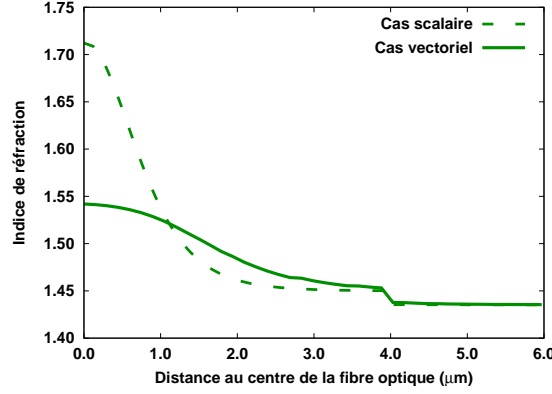


FIGURE 5.13 – Profils d'indice de réfraction du soliton spatial pour les modèles scalaire et vectoriel dans une fibre à saut d'indice constituée d'un cœur de silice de rayon $R_c = 4.0 \mu\text{m}$ pour $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$.

où $\text{Max}(|E_t|)$ et $\text{Max}(|E_z|)$ représentent respectivement la valeur maximale du module des composantes transverse E_t et longitudinale E_z .

Ces deux points justifient le fait que l'indice effectif vectoriel est plus faible à une longueur d'onde fixée que celui du modèle scalaire (se reporter à la figure 5.12).

✓ Cas la fibre optique microstructurée

Nous pouvons alors étudier l'évolution du soliton vectoriel dans le cas de la fibre optique microstructurée. Celle-ci est constituée de trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 1.5 \mu\text{m}$ et de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$.

Dans la configuration linéaire, la figure 5.14 confirme les résultats obtenus section 3.2.3. L'indice effectif dans le cas scalaire est supérieur au cas vectoriel. De plus, l'écart entre les deux modèles diminue pour les faibles longueurs d'onde puisque l'effet des trous d'air s'atténue.

Les phénomènes observés dans la fibre à saut d'indice non-linéaire sont retrouvés pour la FOM. L'indice effectif vectoriel est inférieur au cas scalaire et l'écart diminue pour les faibles longueurs d'onde. Enfin, l'effet non-linéaire augmente avec la longueur d'onde montrant que celui-ci entre en compétition avec l'étalement transverse de la solution dans la structure.

Ainsi, pour les fibres à saut d'indice et microstructurée à cœur plein, l'effet Kerr optique engendre une modulation d'indice rendant l'approximation scalaire moins précise. De plus, la prise en compte des trois composantes du champ permet de décrire de façon complète l'évolution en longueur d'onde de la solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle.

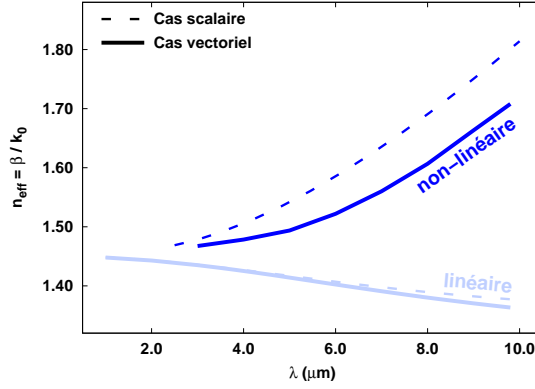


FIGURE 5.14 – Évolution de l'indice effectif linéaire et du soliton spatial vectoriel obtenus avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ en fonction de la longueur d'onde λ pour la FOM de pitch $\Lambda = 6.0 \mu m$ et de rayon des inclusions d'air $a = 1.5 \mu m$. Comparaison avec l'approche scalaire.

La figure 5.15 montre que la composante longitudinale entraîne une modulation de l'indice de réfraction (associée au soliton spatial) moins importante. Nous avons également observé ce phénomène dans le cas de la fibre à saut d'indice (figure 5.13).

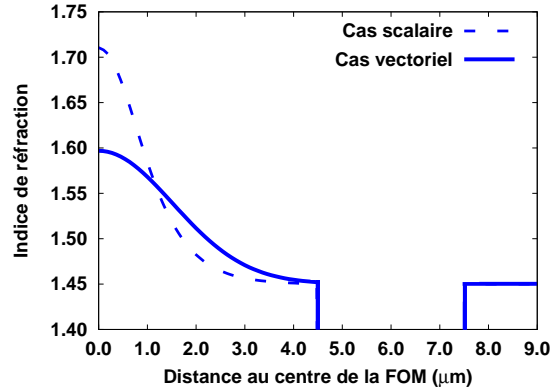


FIGURE 5.15 – Profils d'indice de réfraction du soliton spatial dans les modèles scalaire et vectoriel pour une FOM ($\Lambda = 6.0 \mu m$, $a = 1.5 \mu m$) à $\lambda = 5.0 \mu m$.

Enfin, la prise en compte de la composante longitudinale conduit à un étalement plus important du soliton spatial dans la structure en comparaison du modèle scalaire.

5.6.2 L'algorithme à puissance fixée vectoriel

Comme nous l'avons vu dans la section 4.1.1, l'algorithme à puissance fixée FP_{FEM} permet non seulement de valider l'algorithme auto-cohérent $SC_{Lin1D-Gold}$ mais aussi de comprendre la signification physique de la solution non-linéaire obtenue.

La première étape consiste à adapter la méthode au cas vectoriel en s'inspirant du cas scalaire (définie par la figure 4.1). Le principe général pour la configuration vectorielle est donné par la figure 5.16.

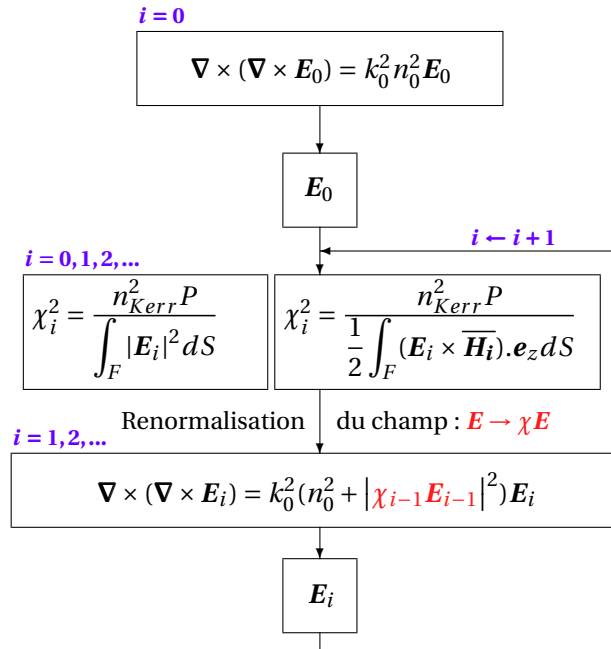


FIGURE 5.16 – Principe de l'algorithme FP_{FEM} vectoriel. La renormalisation du champ à chaque itération peut se faire suivant deux possibilités : le coefficient χ_i^2 est soit fonction du module au carré de E_i (inspiré du cas scalaire), soit fonction de la puissance issue du vecteur de Poynting.

Le point de départ est bien entendu le problème linéaire vectoriel. Puis, nous déterminons le coefficient de renormalisation χ_i et deux possibilités s'offrent alors à nous :

- la première possibilité est la renormalisation par l'intégrale du champ électrique E_i au carré à la manière du cas scalaire mais en considérant toutes les composantes (transverse et longitudinale)

$$\int_F |\psi_i|^2 \text{ devient } \int_F |\mathbf{E}_i|^2 \quad (5.48)$$

Cette configuration nous permet de comparer l'algorithme FP_{FEM} dans les cas scalaire et vectoriel (figure 5.17).

- la deuxième possibilité consiste à renormaliser la solution par la puissance vectorielle représentée par le vecteur de Poynting

$$P_{Poynting} = \frac{1}{2} \int_F (\mathbf{E}_i \times \overline{\mathbf{H}_i}) \cdot \mathbf{e}_z dS. \quad (5.49)$$

Ce qui correspond à la renormalisation la plus naturelle du point de vue physique (figure 5.18). Étant donné la définition de la grandeur γ qui ne correspond pas à la puissance réelle, nous ne pourrions pas comparer les approches scalaire et vectorielle dans ce cas.

La figure 5.17 montre la comparaison des algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} pour les modèles scalaire et vectoriel dans une fibre à saut d'indice ($R_c = 2.0 \mu\text{m}$) à $\lambda = 1.0 \mu\text{m}$. Pour l'algorithme auto-cohérent, le résidu est également représenté pour déterminer avec précision la valeur critique de γ correspondant à la position de la solution non-linéaire auto-cohérente (minimum de résidu).

Les valeurs de Δ représentent l'indice effectif

$$\Delta = \frac{\beta_{NL} - \beta_{lin}}{k_0} \quad (5.50)$$

et γ correspond à la puissance injectée dans le cas de l'algorithme FP_{FEM} et à la puissance *a posteriori* (c'est-à-dire à injecter) pour obtenir la solution non-linéaire auto-cohérente avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ (voir section 4.1.1)

$$\gamma = \frac{n_{Kerr}^2 P}{A_0} \quad (5.51)$$

où $n_{Kerr}^2 = 3.2 \times 10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$ de telle sorte que nous obtenions un coefficient sans dimension.

Tout d'abord, nous remarquons que les résultats entre scalaire et vectoriel sont proches ce qui valide une nouvelle fois l'approche vectorielle. Cependant, comme le montre la figure 5.12, la valeur de l'indice effectif (à travers la valeur de Δ) est différente entre les deux approches scalaire ($n_{eff} = 1.47706$) et vectorielle ($n_{eff} = 1.46015$) pour la longueur d'onde étudiée.

De plus, nous remarquons que la valeur du γ critique (correspondant à la position du minimum de résidu) dans le cas vectoriel est inférieur à celle du cas scalaire. Ceci signifie que la puissance à injecter pour obtenir la solution non-linéaire auto-cohérente est différente dans les deux approches. Nous devons dans le cas vectoriel

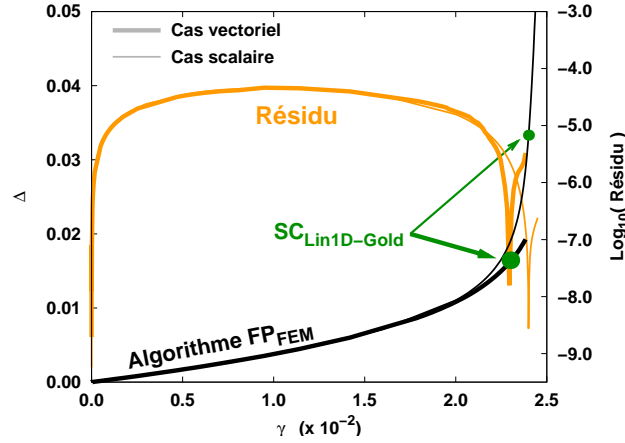


FIGURE 5.17 – Comparaison entre les algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} dans les cas scalaire (trait fin) et vectoriel (trait épais) pour une fibre à saut d'indice ($R_c = 2.0 \mu m$) à $\lambda = 1.0 \mu m$ et représentation du résidu correspondant. Pour le cas vectoriel, la renormalisation via l'équation (5.48) est appliquée.

injecter une puissance inférieure pour obtenir le soliton spatial fondamental par rapport à la configuration scalaire. Ce phénomène s'explique notamment à l'aide de la figure 5.13 car la modulation de l'indice de réfraction dans le cas vectoriel est moins importante que dans le modèle scalaire.

Nous remarquons également que l'algorithme à puissance fixée ne permet pas de déterminer avec précision les caractéristiques de la solution auto-cohérente vectorielle. En effet, à la différence de l'approche scalaire, il n'y a pas de limite asymptotique claire permettant de mettre en évidence avec précision la position de la valeur critique du γ . L'utilisation de notre critère de qualité basé sur la minimisation du résidu est donc un point important pour obtenir la valeur de la puissance critique.

Enfin, nous remarquons que le minimum de résidu est très bien marqué dans l'approche vectorielle également.

✪ Point clé :

Comme pour l'approche scalaire, la solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle correspond à une solution de haute puissance. L'absence d'un saut brutal comparable au modèle scalaire semble indiquer qu'il ne s'agit pas de la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable. En effet, la prise en compte de toutes les composantes et en particulier du fait de la présence de la composante longitudinale, la puissance à injectée pour obtenir le soliton spatial vectoriel est inférieure par rapport au cas scalaire. Enfin, l'utilisation de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ associée à notre critère de qualité

représenté par l'évaluation du résidu nous permet de déterminer avec précision les caractéristiques du soliton spatial vectoriel (au minimum de résidu).

La figure 5.18 montre la comparaison des algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} dans le cas vectoriel lorsque nous effectuons la renormalisation par le vecteur de Poynting.

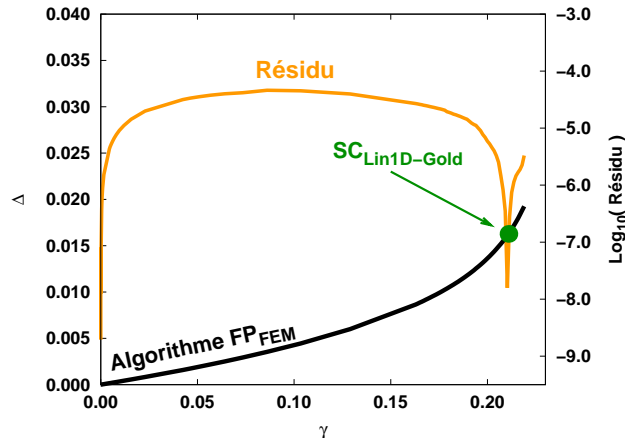


FIGURE 5.18 – Comparaison entre les algorithmes $SC_{Lin1D-Gold}$ et FP_{FEM} dans le cas vectoriel en considérant la puissance de Poynting (renormalisation via l'équation (5.49)) pour une fibre à saut d'indice ($R_c = 2.0 \mu m$) à $\lambda = 1.0 \mu m$ et représentation du résidu correspondant.

Comme le cas précédent (figure 5.17), la renormalisation par la puissance de Poynting dans l'algorithme FP_{FEM} entraîne l'apparition d'une augmentation plus importante de la valeur de Δ en fonction de γ à l'approche de la puissance critique. De plus, ce saut est bien moins marqué que pour le cas scalaire. L'utilisation de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ couplée au calcul de résidu (critère de qualité) est donc indispensable pour déterminer avec précision la puissance à injectée en entrée de l'algorithme pour obtenir en sortie la solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle.

La figure 5.19 montre la répartition du champ de la solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle dans une FOM à trois rangées d'inclusions d'air ($\Lambda = 6.0 \mu m$, $a = 1.5 \mu m$). Elle est à comparer avec la figure 5.7 représentant le champ vectorielle issu de la résolution du problème linéaire. Comme pour le cas scalaire, l'effet non-linéaire confine le champ au centre de la fibre.

✎ **Remarque 27 :** Notons que la polarisation et la symétrie du mode fondamental linéaire sont conservées au cours de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$.

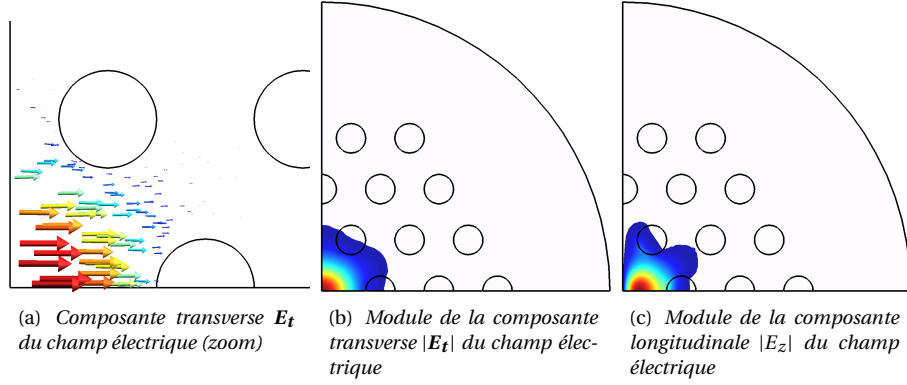


FIGURE 5.19 – Répartition spatiale du champ dans la dimension transverse de la FOM pour le soliton spatial suivant sa composante transverse E_t (a), son module associé $|E_t|$ (b) et pour le module de sa composante longitudinale $|E_z|$ (c).

De plus, la comparaison de la figure 3.26(b) (approche scalaire) avec la figure 5.19(b) pour la même fibre optique microstructurée et à la même longueur d'onde nous montre qualitativement que le champ est moins confiné dans la configuration vectorielle. Nous pouvons expliquer ce phénomène par la présence de la composante longitudinale et des composantes transverses qui atténue l'effet de la non-linéarité par rapport au cas linéaire. Ceci a également été mis en évidence lors de l'analyse des différences entre les approches scalaire et vectorielle (figures 5.12, 5.13 et 5.14).

L'effet de la structure transverse semble donc jouer, comme dans le cas scalaire, un rôle non-négligeable, ce que nous allons vérifier.

5.6.3 Influence de la structure des fibres

Comme dans le cadre de l'approximation scalaire (section 4.2.2), une étude suivant la structure transverse de la fibre est réalisée.

✓ Pour la fibre à saut d'indice

La fibre à saut d'indice modélisée est constituée d'un cœur de silice non-linéaire entourée d'une gaine infinie linéaire dont l'indice de réfraction respecte l'approximation du guidage faible. Les figures 5.20 et 5.21 montrent respectivement l'évolution de l'indice effectif de la solution issue du problème linéaire et de la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ en fonction de la longueur d'onde pour différentes tailles de cœur.

➤ Pour le cas linéaire :

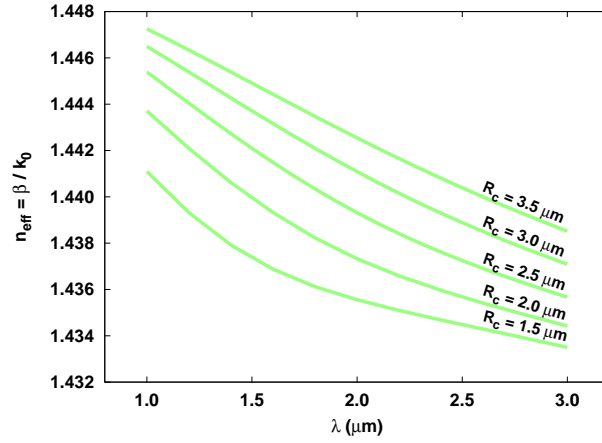


FIGURE 5.20 – Évolution de l'indice effectif pour la solution issue du problème linéaire en fonction de la longueur d'onde λ dans des fibres à saut d'indice présentant des tailles de cœur différentes.

Pour la solution issue de la résolution du problème linéaire (figure 5.20), l'indice effectif diminue pour des longueurs d'onde croissantes et lorsque la taille du cœur diminue. En effet, pour des petites tailles de cœur, le champ est plus étalé dans la gaine en l'absence d'effet non-linéaire ce qui se traduit numériquement par un indice effectif plus faible.

➤ Pour le cas non-linéaire :

Pour le cas non-linéaire (figure 5.21), le phénomène inverse est observé ! Plus la longueur d'onde augmente, plus l'indice effectif augmente (vérifié dans le cas scalaire et par la figure 5.12) : il y a compétition entre l'effet non-linéaire et l'effet de la dispersion.

Nous remarquons que la structure transverse de la fibre à saut d'indice joue un rôle important sur la solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle. En effet, à une longueur d'onde fixée, plus la taille du cœur non-linéaire est importante, plus l'indice effectif diminue et plus l'effet non-linéaire est faible car le champ est moins confiné par la structure. De plus, l'influence du profil transverse augmente avec la longueur d'onde car le rôle de l'interface devient important. Ces observations recoupent donc celles effectuées lors de l'étude de la configuration scalaire (voir section 4.2.2).

✓ Pour la fibre optique microstructurée

La fibre optique microstructurée est composée de trois rangées d'inclusions d'air de rayon $a = 1.5 \mu\text{m}$ et de pitch $\Lambda = 6.0 \mu\text{m}$ entourées d'une matrice de silice non-linéaire. La figure 5.22 montre les mêmes phénomènes que pour la fibre à

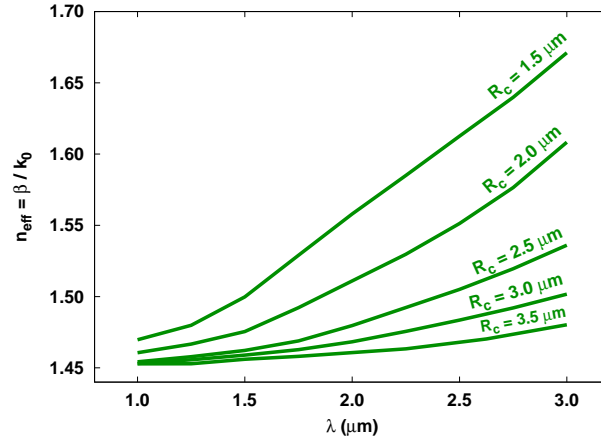


FIGURE 5.21 – Évolution de l'indice effectif pour la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ en fonction de la longueur d'onde λ pour les différentes fibres à saut d'indice.

saut d'indice. En effet, l'indice effectif linéaire suivant la longueur d'onde et pour différentes FOMs diminue avec la longueur d'onde et la taille des trous.

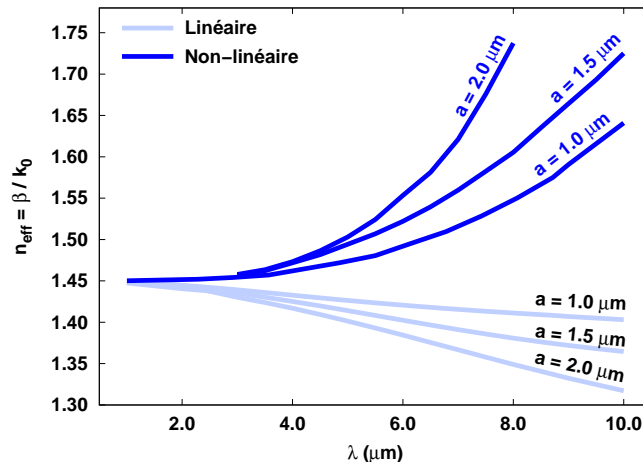


FIGURE 5.22 – Évolution de l'indice effectif linéaire et pour la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ en fonction de la longueur d'onde λ pour des FOMs ayant des tailles d'inclusions d'air a différentes.

Pour le cas non-linéaire, c'est l'inverse : l'indice effectif augmente avec la longueur d'onde et la taille des inclusions d'air. Il y a compétition, comme pour le mo-

dèle scalaire, entre l'effet non-linéaire et l'effet de la dispersion dans la dimension transverse de la fibre.

★ **Point clé :**

L'étude de l'influence de la structure transverse dans la fibre optique à saut d'indice et dans la fibre optique microstructurée à cœur plein montre que le profil transverse de la structure joue un rôle important dans le cas vectoriel également. La validité des résultats des figures 5.21 et 5.22 est vérifiée en étudiant des structures tendant vers le milieu homogène : augmentation de la taille du cœur pour la fibre à saut d'indice et diminution de la taille des inclusions d'air pour la FOM. Dans tous ces cas, l'indice effectif diminue à longueur d'onde fixée quand la structure tend vers le milieu homogène.

5.6.4 Soliton spatial vectoriel du milieu homogène

La dernière étude que nous réalisons concerne la modélisation du milieu homogène non-linéaire dans la configuration vectorielle (figure 5.23). Cependant, son étude s'est révélée extrêmement délicate du fait de la durée importante des temps de calcul et de la sensibilité au maillage des résultats dans le modèle vectoriel pour chaque configuration (géométrie et longueur d'onde).

Pour analyser le cas particulier du milieu homogène, nous implémentons l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ vectoriel (comme pour le cas scalaire) dans une fibre optique à saut d'indice de silice avec un cœur présentant un effet Kerr optique.

Pour nous assurer que nous obtenons effectivement la solution auto-cohérente du milieu homogène non-linéaire, nous augmentons progressivement la taille du cœur. La valeur de la constante de propagation β_{coh} diminue alors jusqu'à une valeur seuil correspondant au soliton spatial du milieu homogène. Par l'analyse de la répartition du champ, nous vérifions que l'interface ne joue aucun rôle dans la détermination de la solution non-linéaire.

La figure 5.23 donne l'évolution de l'indice effectif en fonction de la longueur d'onde de la solution vectorielle dans le milieu homogène. De plus, nous représentons les résultats obtenus dans les fibres à saut d'indice (voir figure 5.21) et pour les FOMs (voir figure 5.22). La comparaison des différentes évolutions de l'indice effectif suivant la structure montre que celui correspondant au milieu homogène est constant.

Une analyse plus fine des résultats indique que la détermination de la valeur de l'indice effectif pour le milieu homogène par l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ vectoriel est sensible suivant la longueur d'onde.

Pour obtenir la valeur de l'indice effectif moyen, nous procédons comme pour le modèle scalaire (voir section 4.2.2). Nous ajustons par une droite l'ensemble des valeurs des indices effectifs correspondant aux longueurs d'onde étudiées. Le fit

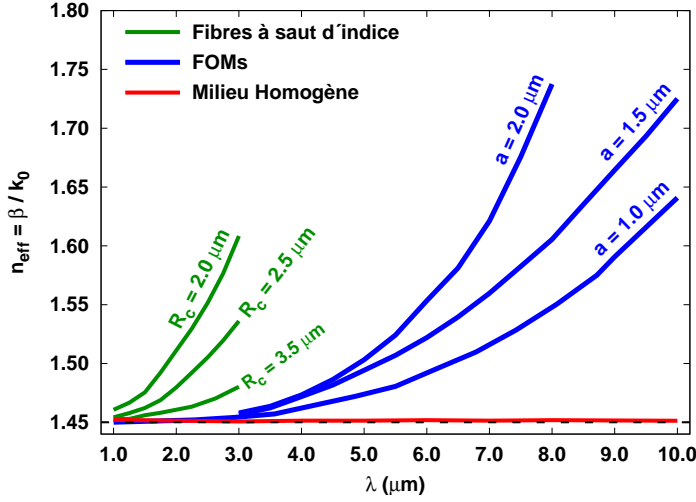


FIGURE 5.23 – Comparaison de l'indice effectif non-linéaire de la solution auto-cohérente vectorielle selon la longueur d'onde pour des fibres à saut d'indice dont le rayon du cœur R_c varie, pour des FOMs avec différents rayons a d'inclusions d'air et pour le milieu homogène non-linéaire. L'indice de réfraction linéaire dans la région guidante est dans tous les cas égal à 1.45 (ligne pointillée).

donne une pente égale à 1.9×10^{-6} et une ordonnée à l'origine égale à 1.4515. L'indice effectif de milieu homogène pour la plage de longueurs d'onde étudiée est donc constant avec $n_{eff} \approx 1.4515$.

La cohérence de ces résultats est vérifiée en les comparant avec ceux obtenus dans le modèle scalaire. De plus, nous remarquons intuitivement que si la taille du cœur augmente pour la fibre à saut d'indice ou la taille des inclusions d'air diminue dans la FOM, l'indice effectif de ces structures tend vers celui du milieu homogène.

Enfin, comme pour l'ensemble des résultats obtenus dans le modèle vectoriel, l'indice effectif obtenu est inférieur à celui donné par le cas scalaire ($n_{eff} \approx 1.4555$). Par conséquent, le cas vectoriel se rapproche de la valeur prédite par Townes (référence [21] et équation (4.7)).

La figure 5.24 montre les profils d'indice de réfraction pour les configurations scalaire (relation (5.45)) et vectorielle (relation (5.46)) pour un milieu homogène présentant un effet Kerr optique.

D'une part, nous remarquons que la modulation d'indice dans les deux cas est faible, ce qui explique que la valeur de l'indice effectif est légèrement supérieure à l'indice de réfraction de la matrice (voir figure 5.23). D'autre part, les profils sont très proches ce qui justifie la similitude entre les indices effectifs non-linéaires des cas scalaire (figure 5.23) et vectoriel (figure 5.23).

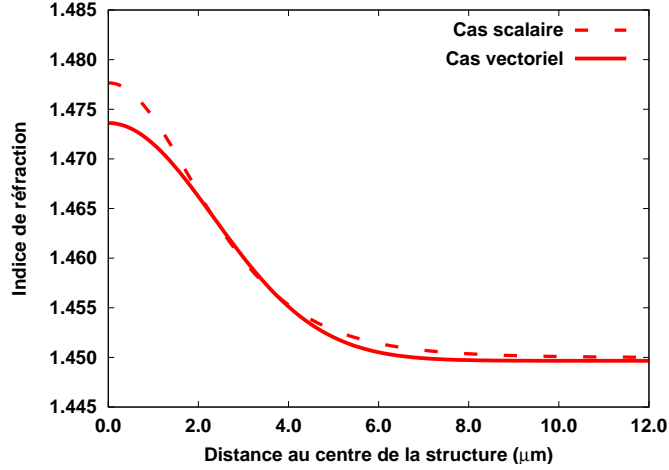


FIGURE 5.24 – *Profils d'indice de réfraction scalaire et vectoriel de la solution non-linéaire auto-cohérente pour le milieu homogène présentant un effet Kerr optique.*

Pour le cas vectoriel et comme nous l'avons observé dans la section 5.6.1, l'amplitude du champ électrique $|\chi|^2 (|E_t|^2 + |E_z|^2)$ est plus faible que pour le cas scalaire. Notons que la différence est beaucoup moins importante que pour la fibre à saut d'indice où le profil transverse joue un rôle non négligeable (se reporter la section 5.6.1).

Dans le cadre de l'étude vectorielle du soliton spatial dans le milieu homogène non-linéaire,

- nous savons que par définition, le contraste d'indice dans le cas linéaire est nul : il n'y a pas de structure transverse. Dans le cas non-linéaire, la modulation d'indice de réfraction est faible (figure 5.24). Dans ces conditions, l'effet de l'approximation scalaire est très limité.
- l'effet de la composante longitudinale est faible (plus faible que pour la fibre à saut d'indice étudiée dans la section 5.6.1) par rapport à la composante transverse puisque

$$\frac{\text{Max}(|E_t|)}{\text{Max}(|E_z|)} > 20 \quad (5.52)$$

où $\text{Max}(|E_t|)$ et $\text{Max}(|E_z|)$ représentent respectivement la valeur maximale du module des composantes transverse E_t et longitudinale E_z . Cette valeur est supérieure à celle obtenue dans le cas de la fibre à saut d'indice (rapport de l'ordre de 8).

Ceci, nous permet de justifier la similitude du soliton spatial du milieu homogène non-linéaire obtenu pour les approches scalaire et vectorielle.

✱ **Existence d'un soliton de Townes vectoriel.**

À ce stade, nous avons montré numériquement que dans le milieu homogène non-linéaire,

- ✓ le soliton spatial scalaire est le soliton de Townes (figure 4.17)
- ✓ l'indice effectif du soliton spatial vectoriel est très proche (à 0.2% près) de celui du cas scalaire, lui-même vérifiant la prédiction du modèle de Townes (figures 4.12 et 5.23).
- ✓ le profil d'indice de réfraction du soliton spatial vectoriel est très proche de celui du cas scalaire (figure 5.24).

Par construction, nous pouvons en déduire que le soliton spatial vectoriel du milieu homogène correspond au *soliton de Townes vectoriel*. C'est la première fois qu'une telle solution est mise en évidence numériquement.

Conclusion

L'ÉTUDE SCALAIRE de la modulation de l'indice de réfraction due à l'effet Kerr optique a montré que l'approximation du guidage faible n'était plus vérifiée. Dans cette perspective, nous avons choisi d'étudier la configuration vectorielle complète découlant directement des équations de Maxwell sans aucune approximation. Comme pour le cas scalaire, notre méthode numérique se compose de deux volets. Le premier consiste à déterminer et à implémenter la formulation faible vectorielle pour l'utilisation de la MEF. Cette formulation est sensiblement plus compliquée dans le cas vectoriel (prise en compte des trois composantes du champ électrique) en comparaison de l'approche scalaire. Le deuxième volet est l'adaptation de l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$ (validé dans le cas scalaire) à la configuration vectorielle : l'étape délicate étant la détermination du coefficient de renormalisation χ .

Nous avons alors pu analyser les différents phénomènes engendrés par l'approche vectorielle. Comme l'étude scalaire, nous avons adopté une démarche progressive. Après la validation du cas linéaire, nous avons étudié l'influence de l'initialisation de l'algorithme en effectuant d'abord un balayage en amplitude puis suivant l'amplitude et la forme de la solution injectée en entrée. L'unicité d'une solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle pour une structure donnée et à une longueur d'onde fixée a été démontrée numériquement. Puis, nous avons étudié la signification physique de cette solution en effectuant :

- une analyse en fonction de la longueur d’onde illustrant la différence entre les cas scalaire et vectoriel. L’approximation scalaire est donc intrinsèquement moins précise que le cas vectoriel complet.
- une étude de l’algorithme vectoriel à puissance fixée. Ceci nous a permis de montrer que le soliton spatial est une solution de haute puissance. Mais, contrairement au cas scalaire, il ne s’agit pas de la solution de plus haute puissance avant l’auto-focalisation instable. La puissance à injecter pour obtenir effectivement cette solution est inférieure dans le modèle vectoriel en comparaison du cas scalaire.
- une analyse de l’influence de la structure transverse des fibres optiques modélisées. Ceci nous a permis de montrer que la géométrie jouait un rôle important et notamment en raison de la présence de la composante longitudinale. Nous avons montré que celle-ci entraînait un confinement moins important de la solution dans la structure.
- une étude dans le milieu homogène non-linéaire. Nous avons mis en valeur la présence d’un soliton spatial vectoriel correspondant au soliton de Townes par comparaison des indices effectifs entre le modèle scalaire, le modèle vectoriel et le modèle de Townes [21].

Grâce à cette étude, nous avons donc mis en évidence et généralisé le soliton de Townes vectoriel puisque nous avons montré numériquement qu’il est différent des solitons spatiaux obtenus dans les différentes fibres optiques bien que ces derniers correspondent à des solutions de hautes puissances.

Une étude originale de FOM à défaut creux : le cas donneur - accepteur

Introduction

LA MÉTHODE NUMÉRIQUE que nous avons conçue et développée permet d'obtenir la solution non-linéaire auto-cohérente de plus haute puissance dans les fibres optiques microstructurées à cœur plein. Pour ce type de fibres, nous avons montré à travers cette étude, que le soliton spatial était localisé dans le défaut constitué par l'omission d'une inclusion d'air au centre. Cependant, le défaut peut être également généré par la présence d'un trou d'air central de taille différente des inclusions d'air environnantes et formant la gaine de la fibre optique. Après une présentation du principe théorique de cette nouvelle approche, nous étudierons la configuration où le trou d'air central est plus petit que les inclusions formant la gaine. Il s'agit du cas dit *donneur*. Celui-ci nous permettra de valider l'approche numérique que nous avons utilisée pour les autres fibres. Enfin, nous étudierons la configuration où la taille du trou central est plus importante que les inclusions d'air l'entourant. C'est le cas dit *accepteur*. Celui-ci nous permettra d'obtenir des comportements non-linéaires nouveaux. L'étude menée dans ce chapitre est réalisée dans le cadre du *modèle scalaire* dans le but de comprendre plus facilement les phénomènes observés. Enfin, les bases de cette étude ont été publiées dans la référence [24] et concernent l'approche linéaire pour les cas donneur/accepteur.

6.1 Présentation de la FOM à défaut creux

6.1.1 Géométrie et caractéristiques

Comme la fibre microstructurée à cœur plein, la fibre microstructurée à défaut creux que nous considérons est composée d'un nombre fini de rangées d'inclusions

d'air entourées d'une matrice de silice présentant un effet Kerr optique. Cependant, le cœur n'est pas constitué par l'omission d'un trou d'air mais par la présence d'une inclusion d'air de taille différente. La figure 6.1 est la photo d'une fibre optique microstructurée à défaut creux en silice présentant un effet Kerr optique et où la taille du trou d'air central est plus importante que celle des inclusions environnantes. Elle est composée de six rangées de trous entourées d'une gaine de silice "pleine".

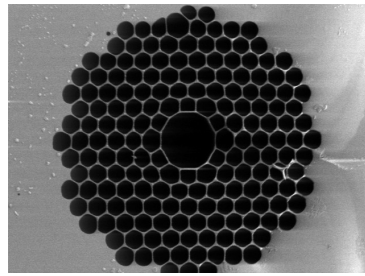


FIGURE 6.1 – Fibre optique microstructurée à défaut creux composée d'une matrice en silice et d'inclusions d'air dont le diamètre du trou d'air central est d'environ 10 μm . (Photo : Géraud Bouwmans - Université de Lille I - IRCICA/PHlam).

Dans ce chapitre, nous allons modifier la taille du défaut central afin de

- modifier le comportement linéaire du mode fondamental
- moduler l'influence de la non-linéarité Kerr optique.

Remarque importante 28 : Comme le montre la figure 6.1, la FOM a un défaut central constitué par une inclusion circulaire d'air. Dans la configuration donneur/accepteur, les modes sont localisés dans la matrice de haut indice et non dans le trou central [50, 69]. Pour cette raison, nous ne parlons pas de fibre optique microstructurée à cœur creux mais à défaut creux.

6.1.2 Modélisation

Nous avons choisi d'étudier la configuration $C_{4,v}$ [17, 48, 49] où la maille est carrée. Dans ce cas, la structure est invariante par rotation d'un angle égal à $2\pi/4$ (indice 4) et il y a exactement quatre plans de symétrie. Ces plans de symétrie appartiennent à l'axe de rotation et l'angle entre deux plans de symétries voisins est égal à $\pi/4$ (indice v).

La figure 6.2 montre la répartition du champ du mode fondamental linéaire dans une structure $C_{4,v}$. Afin de réduire le nombre d'éléments nécessaires à la modélisation de la fibre, nous étudions la structure du mode fondamental dans une fibre complète et nous remarquons que nous pouvons réduire la géométrie à une

section de $\pi/2$. Une section de $\pi/4$ peut également être modélisée mais nous privilégions une structure plus grande afin de faciliter la visualisation et le suivi des solutions dans le cas non-linéaire. Il suffit alors d'imposer les bonnes conditions aux limites sur les bords de la structure réduite.

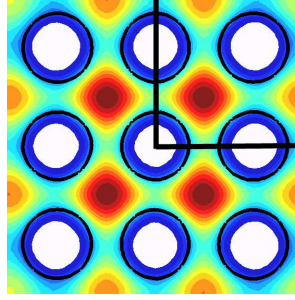


FIGURE 6.2 – Répartition du champ du mode fondamental linéaire dans une structure $C_{4,v}$.

La figure 6.3(a) montre le schéma de la fibre optique microstructurée à défaut creux utilisée. Elle est constituée de trois rangées d'inclusions d'air entourées d'une zone de transformation. Pour l'étude du mode fondamental, nous imposons une condition de Neumann implicite sur les bords (1) et (2) et de Dirichlet explicite sur le bord (3).

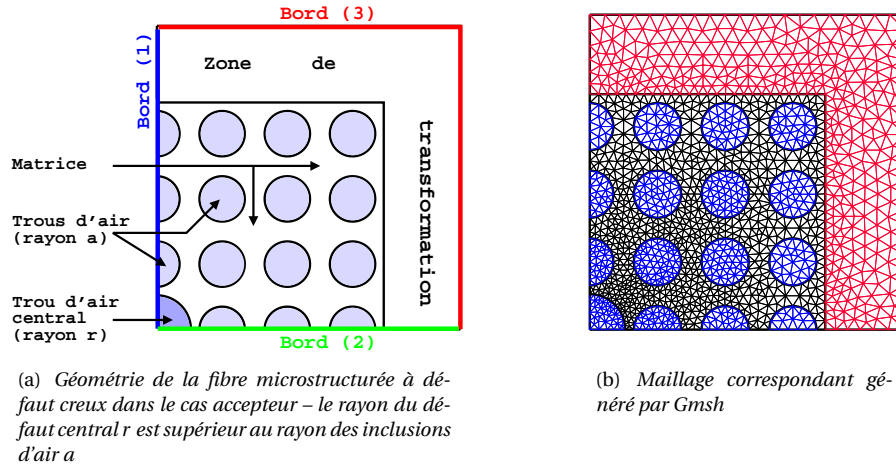


FIGURE 6.3 – Modélisation de la fibre optique microstructurée à défaut creux avec Gmsh.

De plus, nous appliquons une zone de transformation proche des inclusions d'air. Cette région peut être soit une couche absorbante simple, soit une PML caractérisée chacune par un coefficient d'absorption à régler afin de modéliser une géo-

métrie infinie par une géométrie finie sans modifier les caractéristiques du mode. Dans le cadre de la modélisation puis de la résolution numérique, si la distance entre la dernière rangée de trous et la zone de transformation est trop importante, le défaut n'est plus le trou central mais l'espace ainsi formé. Le mode s'y localise et les résultats deviennent faux.

D'autres configurations seront étudiées où le nombre de rangées d'inclusions sera plus important. En effet, la présence d'un trou d'air central engendre un confinement moins important du champ que dans la fibre à cœur plein. Une résolution numérique précise du problème non-linéaire nous impose d'utiliser un nombre de rangées de trous suffisamment important (au minimum trois) pour éviter que la zone de transition n'affecte les résultats. Si le nombre de rangées est trop faible (une ou deux rangées), alors le champ atteint la zone de transition ce qui fausse bien entendu les résultats.

Dans l'ensemble de ce chapitre nous modélisons une FOM à défaut creux composée de quatre rangées de trous d'air de rayon $a = 0.8 \mu\text{m}$, de pitch $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ et entourées d'une matrice de silice non-linéaire. Son indice de réfraction dans le cas linéaire est $n_{0,\text{matrice}} = 1.45$ et la longueur d'onde d'étude est $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$. Dans ces conditions, le rapport $\Lambda/\lambda \approx 2.16$.

✪ Point clé :

Nous notons a le rayon des trous d'air constituant la gaine de la fibre et r le rayon de l'inclusion centrale. Si $r < a$ alors nous étudions des modes *donneurs* et si $r > a$ nous sommes dans le cas de modes *accepteurs*. Ces terminologies sont utilisées par analogie avec les niveaux donneurs et accepteurs lors de la présence d'impuretés en physique du solide [24].

Ainsi, avec ces conditions et si la zone de transformation est correctement placée avec un coefficient d'absorption suffisamment élevé, nous pouvons obtenir le mode fondamental que nous voulons étudier. Enfin, nous rappelons que nous réalisons cette étude suivant le modèle scalaire afin de comprendre les phénomènes mis en jeu.

6.2 Les approches théorique et numérique

L'approche théorique scalaire de la linéarité et donc de l'effet non-linéaire Kerr dans les FOMs à défaut creux est différente de celle définie dans le cas de fibres à cœur plein (fibre à saut d'indice et FOM). Le point de départ de l'analyse non-linéaire et le mode issu de la résolution du problème linéaire. Une étude préliminaire du cas linéaire est donc indispensable. Par ailleurs, le processus itératif que nous allons utiliser pour cette étude est l'algorithme SC_{Lin1D} scalaire (voir section 3.4.1).

6.2.1 L'approche théorique : le cas linéaire

Pour comprendre les phénomènes mis en jeu, nous devons au préalable étudier le cas d'un *réseau périodique de trous d'air sans défaut*. Il s'agit d'un cristal photonique infini dont la périodicité des inclusions est orientée selon les dimensions transverses x et y : il s'agit d'un cristal photonique 2D [5, 8]. Dans cette structure et plus généralement dans les FOMs à défaut creux, il existe des bandes en longueur d'onde pour lesquelles la propagation de la lumière est interdite. Nous parlons alors de *Bandes Interdites Photoniques*. Cette propagation est à différencier de celle se produisant dans les fibres à cœur plein qui peut en première approximation être assimilée à un phénomène de réflexion totale interne modifiée.

Pour déterminer ces bandes, nous considérons une cellule élémentaire carrée (figure 6.4) et nous appliquons des conditions aux bords périodiques : ceci permet de modéliser numériquement un réseau infini de trous d'air [17].

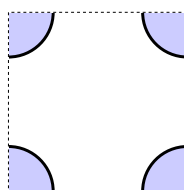


FIGURE 6.4 – Cellule élémentaire permettant l'implémentation du cas périodique. Les quarts de cercle représentent les inclusions d'air et les lignes pointillées le contour de la cellule élémentaire.

La figure 6.5 montre l'évolution de l'indice effectif dans le cas linéaire suivant le rapport Λ/λ où Λ est le pitch entre deux trous voisins et λ est la longueur d'onde. Les régions blanches sont les bandes interdites photoniques dans lesquelles aucun mode linéaire n'existe dans la structure périodique. Les régions colorées sont les bandes de conduction dans lesquelles il existe des modes appelés modes de Bloch [29, 17].

Si nous introduisons un défaut, la périodicité du réseau est brisée. Dans ces conditions, pour une longueur d'onde appartenant à une bande interdite photonique, un mode pourra être piégé et se propager au niveau du défaut.

Dans le cas du mode fondamental issu de la résolution du problème linéaire,

- les modes donneurs n'existent que dans la région supérieure du diagramme de bandes correspondant aux indices effectifs les plus élevés. Nous appelons cette région, la *bande interdite semi-infinie*.
- les modes accepteurs n'existent que dans la deuxième bande interdite correspondant aux indices effectifs plus faibles que ceux de la bande interdite semi-infinie. Nous appelons cette région, la *première bande interdite finie*. Ceci est cohérent dans le sens où nous savons que plus le défaut central est

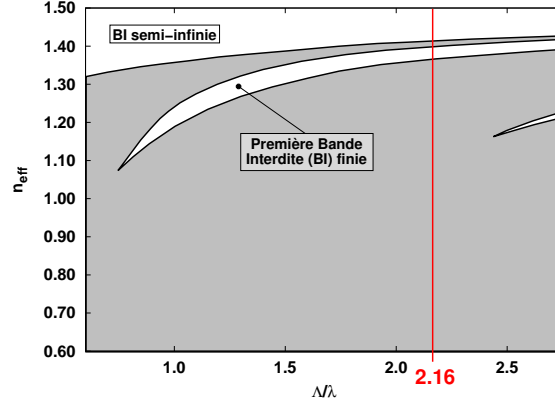


FIGURE 6.5 – Diagramme de bandes de la structure périodique $C_{4,v}$ dans le cas linéaire. Définition des bandes interdites (bandes blanches). Le trait rouge vertical à $\Lambda/\lambda \approx 2.16$ représente la configuration définie dans le texte : $\Lambda = 2.3 \mu m$ et $\lambda = 1.064 \mu m$.

important, plus le champ s'étend dans la fibre et donc plus l'indice effectif est faible.

Ainsi, la présence d'une inclusion d'air centrale de taille plus petite que les trous environnants entraîne une migration (vers le haut) des modes issus de la région interbande comprise entre la bande interdite semi-infinie et la première bande finie vers la bande interdite semi-infinie (cas donneur sur la figure 6.5). Plus l'inclusion est petite plus l'indice effectif du mode donneur est élevé dans la bande interdite semi-infinie [24].

Au contraire, la présence d'une inclusion d'air plus grande que les trous environnants entraîne une migration (vers le bas) des modes de la première bande de conduction vers la première bande interdite finie (cas accepteur sur la figure 6.5).

6.2.2 L'approche numérique : le cas non-linéaire

Dans le cadre de cette étude, nous souhaitons étudier les phénomènes engendrés par l'effet non-linéaire de type Kerr optique. Dans cette perspective et pour faciliter notre approche, nous nous plaçons dans l'*approximation scalaire*. Comme dans le cas de l'étude des fibres optiques à saut d'indice et microstructurée à cœur plein, nous devons donc résoudre l'équation (2.9)

$$\Delta_t \phi + k_0^2 \left(n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} n_{Kerr}^2 |\phi|^2 \right) \phi = \beta^2 \phi \quad (6.1)$$

En utilisant le changement de variable (2.28), nous devons résoudre l'équation (2.29) :

$$\Delta_t \psi_i + k_0^2 (n_0^2 + \mathbb{1}_{nl} |\chi_i \psi_i|^2) \psi_i = \beta_i^2 \psi_i \quad (6.2)$$

Dans le cadre de cette étude, l'algorithme utilisé pour résoudre le problème non-linéaire est l'algorithme SC_{Lin1D} dont le principe est présenté par la figure 6.6.

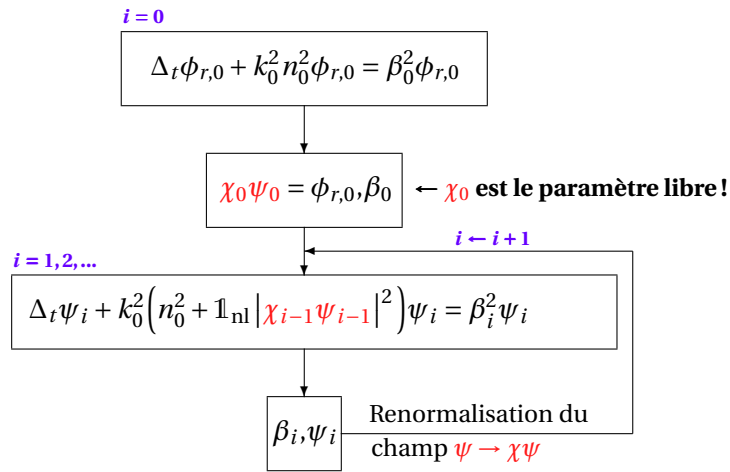


FIGURE 6.6 – Principe de l'algorithme SC_{Lin1D} . Le coefficient χ_0 est augmenté progressivement à l'issue de la résolution du problème linéaire de l'étape $i = 0$. Le point de départ est $\chi_0 = 0$ (cas linéaire).

Cependant, l'utilisation de l'algorithme SC_{Lin1D} pour l'étude des modes donneurs/accepteurs est différente que pour le cas des FOMs à cœur plein. Le principe est le suivant :

- ❶ Le point de départ est le mode fondamental linéaire ($\chi_0 = 0$).
- ❷ Nous choisissons une valeur de χ_0 supérieure au cas précédent.
- ❸ Le processus itératif est lancé pour la valeur de χ_0 choisie et nous calculons à la convergence :
 - l'indice effectif
 - le résidu associé
 - P_{fin} représentant la puissance physique (en watt) de la solution obtenue à la convergence du processus itératif

$$P_{fin} = \frac{\beta_{fin} \epsilon_0 c}{2k_0 n_{Kerr}^2} \int_F |\chi_{fin} \psi_{fin}|^2 dS \quad (6.3)$$

où F est la section transverse de la fibre, χ_{fin} est le coefficient permettant la renormalisation du champ ψ_{fin} obtenu à la convergence. Comme nous

l'avons déjà souligné, P_{fin} représente la puissance à injecter dans la fibre optique pour obtenir la solution non-linéaire $(\beta_{fin}, \chi_{fin}, \psi_{fin})$.

④ Nous recommençons au point ②.

Pour la représentation des résultats, nous utilisons le coefficient sans dimension γ que nous avons défini lors de l'étude de l'algorithme à puissance fixée (équation (4.2))

$$\gamma = \frac{n_{Kerr}^2 P_{fin}}{A_0}. \quad (6.4)$$

Enfin, nous posons la grandeur μ représentant l'indice effectif n_{eff} et la partie linéaire de l'indice de réfraction de la matrice $n_{0,matrice}$ telle que

$$\mu = n_{0,matrice} - n_{eff} \quad (6.5)$$

où $n_{0,matrice} = 1.45$ dans le cas de la fibre optique microstructurée à défaut creux que nous considérons.

✎ **Remarque importante 29** : le champ χ_{fin}, ψ_{fin} est à distinguer du champ χ_{coh}, ψ_{coh} défini dans les chapitres précédents et qui est obtenu non seulement à la convergence de l'algorithme mais aussi pour le minimum de résidu. Dans ce chapitre, nous représenterons ainsi toutes les solutions non-linéaires déterminées à l'issue du balayage en amplitude de la solution injectée en entrée de l'algorithme SC_{Lin1D} .

Pour l'étude des cas donneur et accepteur, nous représenterons graphiquement les deux grandeurs obtenues à la convergence de l'algorithme SC_{Lin1D} : il s'agit de γ correspondant à la puissance P_{fin} et μ correspondant à l'indice effectif linéaire et non-linéaire (figure 6.7).

La figure 6.7 montre les différentes bandes intervenant dans l'étude des cas donneur et accepteur pour la FOM décrite ci-dessus en fonction des grandeurs γ et μ . Elle correspond à une coupe transverse de la figure 6.5 pour les caractéristiques de la FOM à défaut creux que nous allons étudier à savoir pour $\Lambda/\lambda \approx 2.16$. Les flèches vertes montrent la migration des modes de la première bande de conduction vers la bande interdite semi-infinie (modes donneurs). Les flèches rouges montrent la migration des modes de la première bande de conduction vers la première bande interdite finie (modes accepteurs).

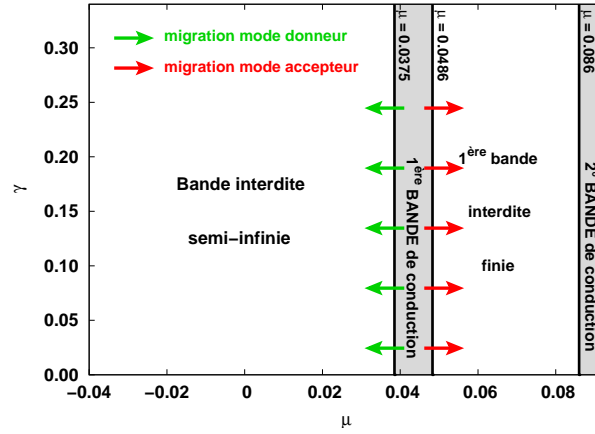


FIGURE 6.7 – Représentation des différentes bandes pour $\Lambda/\lambda \approx 2.16$ (coupe verticale de la figure 6.5). Migration des modes dans le cas donneur (flèches vertes) et dans le cas accepteur (flèches rouges) pour le mode fondamental.

6.2.3 Cas “périodique” : un unique soliton spatial

✎ **Remarque préliminaire 30 :** Dans le cadre de cette étude, nous appelons le cas “périodique” une structure de taille finie présentant une inclusion centrale circulaire de même taille que les trous environnants. Il ne s’agit donc pas d’une structure périodique infinie.

La figure 6.8 montre l’évolution de l’indice effectif (à travers la valeur de μ) et du résidu associé suivant la puissance P_{fin} (représentée par γ). Ces deux grandeurs sont obtenues à la convergence de l’algorithme SC_{Lin1D} .

➤ Cas linéaire :

Dans un premier temps, nous remarquons que le mode fondamental linéaire ($\gamma = 0$) se situe bien à la limite supérieure de la première bande ($\mu = 0.0375$) ; l’indice effectif de ce mode étant le plus élevé. Par ailleurs, le cas linéaire obtenu dans une FOM à quatre rangées d’inclusions d’air présente la même valeur de l’indice effectif (même valeur de μ) que celui correspondant au cas périodique infini à 1% près.

➤ Cas non-linéaire :

Concernant l’évolution en γ , nous remarquons que plus la puissance à injecter est importante, plus l’indice effectif est important (μ faible) ce qui est cohérent avec les études menées dans les autres géométries (fibre à saut d’indice et FOM à cœur plein). Ce résultat est également donné dans la section suivante (figure 6.10) afin

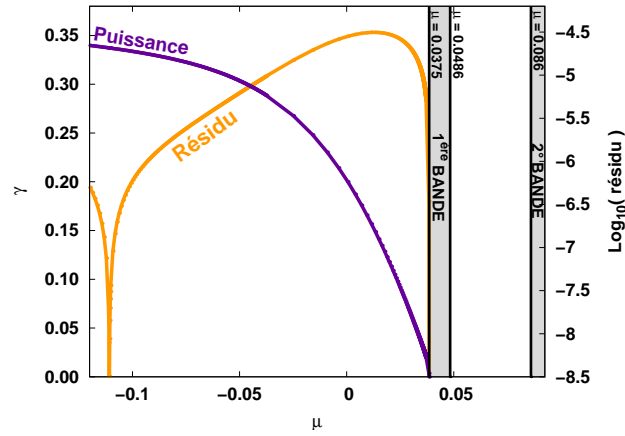


FIGURE 6.8 – Évolution de l'indice effectif (fonction de μ) suivant la puissance (fonction de γ) déduite des solutions non-linéaires obtenues et évolution du résidu associé pour $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$. La configuration représentée est le cas d'une FOM sans défaut au centre (cristal photonique 2D de dimension finie) défini au début de cette section.

d'illustrer la différence entre le cas périodique et le cas donneur (inclusion centrale plus petite que les trous environnants).

➤ Minimum de résidu :

Comme pour les fibres optiques à sauts d'indice et microstructurées à cœur plein, le balayage en amplitude fait apparaître deux minima. Le premier correspond au cas linéaire ($\gamma = 0$) et le second à la solution non-linéaire auto-cohérente de haute puissance. Pour une FOM à défaut creux, il y a donc également un soliton spatial défini par le minimum du résidu.

6.3 Validation de la méthode : le cas donneur

Nous rappelons que l'étude du cas donneur s'effectue dans une fibre optique microstructurée où la taille de l'inclusion d'air centrale, dont le rayon est noté r , est inférieure à la taille des trous environnants.

6.3.1 Variation de la taille du défaut

La figure 6.9 montre l'évolution de l'indice effectif (représenté par μ) et de l'aire effective normalisée par le pitch au carré et associée à la solution non-linéaire obtenue suivant la puissance P_{fin} (représentée par γ) déduite des solutions non-linéaires obtenues à la convergence de l'algorithme SC_{Lin1D} . L'aire effective normalisée est donnée par la relation suivante :

$$\frac{A_{eff}}{\Lambda^2} = \frac{1}{\Lambda^2} \times \frac{\left(\int_F |\psi_{coh.}(x, y)|^2 dS \right)^2}{\int_F |\psi_{coh.}(x, y)|^4 dS}. \quad (6.6)$$

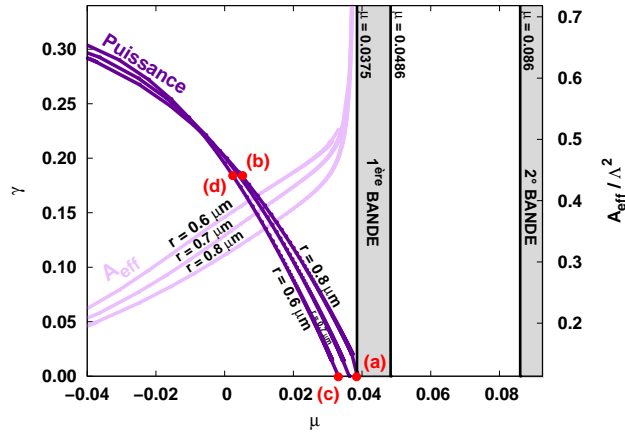


FIGURE 6.9 – Évolution à $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$ de l'indice effectif et de l'aire effective normalisée A_{eff}/Λ suivant la puissance (γ) des solutions non-linéaires dans les cas “périodique” ($r = 0.8 \mu\text{m}$) et donneur non-linéaire ($r = 0.7$ et $r = 0.6 \mu\text{m}$). Les bandes grisées et blanches sont respectivement les bandes de conduction et interdites du cas linéaire périodique. La répartition du champ correspondant aux marques rouges (a), (b), (c) et (d) est donnée par la figure 6.10.

La figure 6.9 rappelle le cas “périodique” ($r = 0.8 \mu\text{m}$) défini dans la section précédente et par la figure 6.8 et montre deux structures correspondant au cas donneur ($r = 0.7$ et $r = 0.6 \mu\text{m}$).

➤ Évolution de l'indice effectif (ou μ) :

L'analyse de l'évolution de l'indice effectif (à travers le coefficient μ) montre que, pour le cas linéaire ($\gamma = 0$), plus la taille du défaut diminue, plus l'indice effectif augmente (μ diminue). En effet, pour un défaut plus important, le champ est plus délocalisé dans la fibre et l'indice effectif est donc plus faible.

Pour le cas non-linéaire et pour chaque configuration, plus la puissance augmente, plus l'indice effectif augmente. Cependant, il faut distinguer deux parties dans l'évolution de l'indice effectif dont la frontière se situe à $\mu \approx -0.01$ (correspondant à $\gamma \approx 0.225$). Pour les valeurs de $\mu > -0.01$, les solutions non-linéaires respectent l'évolution linéaire. À une puissance donnée, plus le trou est petit plus l'indice effectif est important.

Pour les valeurs de $\mu < -0.01$, c'est le phénomène inverse qui se produit. Plus

la taille de l'inclusion centrale diminue, plus l'indice effectif est faible. Comment expliquer ce phénomène ?

- pour $-0.01 < \mu < 0.0375$, la valeur de la puissance est faible, c'est donc l'effet du mode linéaire qui est prépondérant sur l'effet non-linéaire. Lorsque la taille du défaut diminue, le champ est plus confiné dans la structure et donc l'indice effectif augmente.
- pour $\mu < -0.01$, la puissance est élevée et c'est donc l'effet non-linéaire qui est prépondérant sur l'influence du mode linéaire. Dans ce cas, lorsque la taille du défaut diminue, l'écart entre l'inclusion centrale et le défaut augmente et donc le champ est moins confiné. L'indice effectif est alors moins important.

➤ Évolution de l'aire effective A_{eff} :

Pour les cas “périodique” ($r = a$) et donneurs ($r < a$) non-linéaires, plus la puissance injectée est importante, plus l'aire effective diminue. D'après les études précédentes dans les autres fibres optiques, ce phénomène est logique puisque l'augmentation de la puissance entraîne un confinement du champ dans la fibre et donc une diminution de l'aire effective. Par ailleurs, l'augmentation exponentielle de l'aire effective à l'approche de la première bande de conduction et pour les faibles puissances indique une délocalisation du mode dans la structure au voisinage du cas périodique.

Lorsque la taille du défaut central diminue, l'aire effective diminue. En effet, si le défaut est plus petit, l'espace entre celui-ci et la première rangée d'inclusions d'air est grande ce qui explique qu'à une puissance donnée l'aire effective est plus importante dans ce cas.

Pour se rendre compte de l'évolution du champ dans la FOM décrite, nous étudions la répartition du champ (figure 6.10) pour chaque marque rouge repérée sur la figure 6.9. Ceci permet d'illustrer les évolutions observées de l'indice effectif et de l'aire effective.

Le champ dans le cas du mode fondamental linéaire périodique est beaucoup plus délocalisé que pour le cas donneur linéaire. Ceci explique l'évolution exponentielle de l'aire effective à l'approche de cette configuration.

De plus, dans le cas donneur non-linéaire (figure 6.10(d)), nous remarquons un confinement légèrement moins important du champ autour de défaut en comparaison du cas périodique non-linéaire (figure 6.10(d)). Ceci explique le fait que, à $\gamma = 0.18$, l'aire effective correspondant au cas donneur est supérieure à la configuration “périodique”. La figure 6.10 confirme donc les phénomènes décrits précédemment.

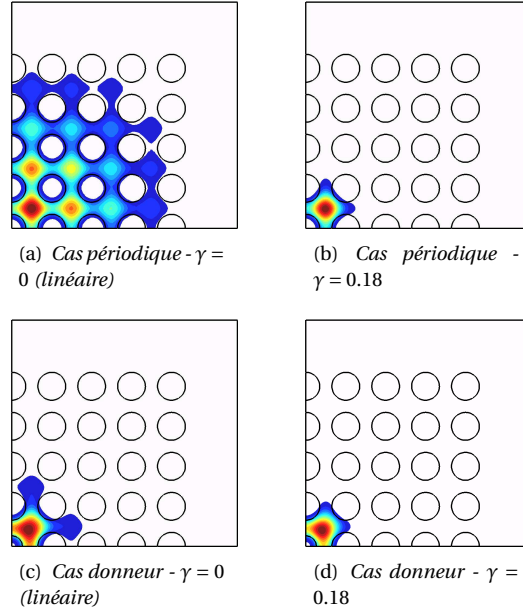


FIGURE 6.10 – Répartition du champ dans les cas linéaire et non-linéaire pour la configuration “périodique” et la configuration “donneur” décrites dans cette section. Les grandeurs caractéristiques de chaque champ sont données par la figure 6.9.

6.3.2 Étude de l’effet Kerr négatif

Comme nous venons de le voir, le mode donneur suivi dans le cas non-linéaire est toujours situé dans la bande interdite semi-infinie du diagramme. Il peut donc être intéressant d’étudier le cas d’un effet non-linéaire de type Kerr négatif afin d’étudier la solution à l’approche de la première bande de conduction. Dans ce cas, la permittivité est d’après l’équation (1.23) :

$$\epsilon_r = n_0^2 - \mathbb{1}_{\text{nl}} n_{\text{Kerr}}^2 |\psi|^2. \quad (6.7)$$

La figure 6.11 montre l’évolution de l’indice effectif suivant la puissance de la solution non-linéaire dans le cas d’un effet Kerr négatif. En guise de comparaison, nous rappelons également l’évolution de la solution non-linéaire pour un effet Kerr optique positif.

Le point de départ est naturellement le mode obtenu par la résolution du problème linéaire. Comme nous pouvions le prévoir, l’indice effectif diminue quand la puissance (ou γ) augmente. L’évolution de l’aire effective montre que, lorsque la solution se rapproche de la première bande de conduction pour $\mu = 0.0375$, le champ se délocalise. La comparaison de la répartition du champ entre la configuration linéaire pour $\gamma = 0$ (figure 6.12(a)) et non-linéaire pour $\gamma = 0.04$ (figure 6.12(b))

confirme ce phénomène. À partir de $\mu = 0.0375$ (limite de la première bande de conduction), si la puissance augmente, le champ n'est plus localisé au centre (dans le défaut), mais dans la structure : ce n'est plus le même mode.

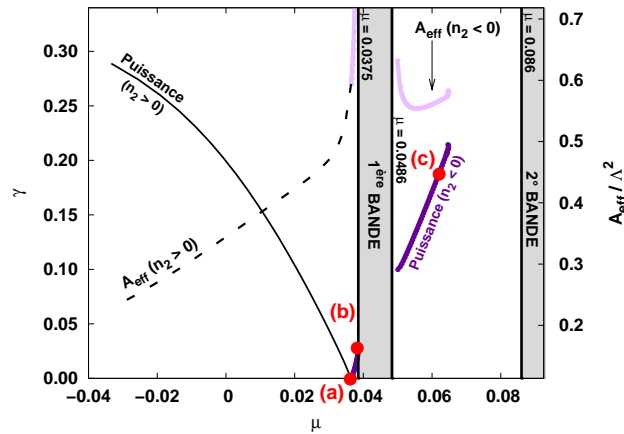


FIGURE 6.11 – Évolution de l'indice effectif et de l'aire effective normalisée suivant la puissance de la solution non-linéaire issue de l'algorithme SC_{Lin1D} pour la FOM décrite section 6.3.1 et pour un défaut de rayon $r = 0.7 \mu m$. Les marques rouges correspondent aux champs représentés par la figure 6.12 pour certaines configurations intéressantes du cas Kerr négatif.

Puis, lorsque nous augmentons encore la puissance, le mode localisé au centre réapparaît. Pour $\mu > 0.0486$, la diminution de l'aire effective indique que le champ se relocalise au centre de la fibre (figure 6.12(c)) puis qu'il évolue peu jusqu'à une nouvelle limite à $\gamma = 0.062$. Au delà de cette limite, le mode que nous étudions disparaît en se délocalisant dans la structure. Nous pouvons remarquer ce phénomène avec l'évolution de l'aire effective normalisée qui augmente exponentiellement.

Ainsi, l'effet Kerr optique négatif dans la configuration donneur entraîne le passage de la solution non-linéaire issue du mode fondamental de la bande interdite semi-infinie vers la première bande interdite finie. Cependant, le mode n'atteint pas la seconde bande de conduction (deuxième région grisée sur la figure 6.11). En effet, l'augmentation brutale de l'indice effectif et de l'aire effective pour $\mu \approx 0.065$ indique que le mode disparaît dans la structure : ce n'est plus un mode de défaut.

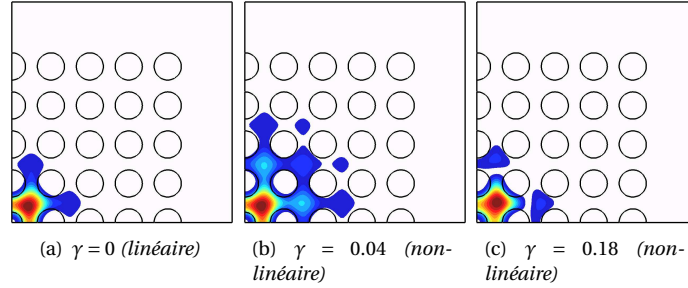


FIGURE 6.12 – Répartition du champ de la solution linéaire (a) et non-linéaire pour différentes puissances de la solution non-linéaire (b) et (c) dans le cas donneur et pour la FOM décrite section 6.3.1.

6.4 Des résultats contre-intuitifs : le cas accepteur

Si la taille de l'inclusion centrale circulaire est supérieure aux trous d'air environnants, il s'agit du cas accepteur. Cette configuration est particulièrement intéressante puisque comme nous l'avons vu précédemment (section 6.2.1), le mode fondamental linéaire se situe dans la première bande interdite finie.

Nous pouvons alors nous demander comment l'effet non-linéaire peut modifier l'évolution de la solution lorsque la puissance injectée augmente. Nous étudierons l'influence de la variation de la taille du défaut et l'effet contre-intuitif engendré par la non-linéarité Kerr optique dans ce type de configuration. Comme dans le cas donneur, nous analyserons l'influence de l'effet Kerr négatif.

6.4.1 Variation de la taille du défaut

Pour la première étude, nous partons du cas accepteur linéaire et la puissance de la solution non-linéaire issue de l'algorithme SC_{Lin1D} est augmentée par l'intermédiaire de la renormalisation χ_0 du champ initiale. La figure 6.13 montre l'évolution de la puissance injectée (représentée par la valeur de γ) et de l'aire effective en fonction de l'indice effectif (à travers le coefficient μ).

Nous remarquons que, quelle que soit la puissance de la solution non-linéaire, l'aire effective est plus faible lorsque la taille de l'inclusion d'air centrale augmente. Ceci vient du fait que l'espace entre le défaut et la première inclusion d'air diminue lorsque la taille du défaut augmente. Nous retrouvons pour l'aire effective les phénomènes observés pour le cas donneur (section 6.3.1).

➤ **Dans la première bande interdite finie ($0.0486 < \mu < 0.086$) :**

Tout d'abord, nous vérifions que le mode accepteur linéaire ($\gamma = 0$) est bien situé dans la première bande interdite finie (bande blanche de droite sur la figure

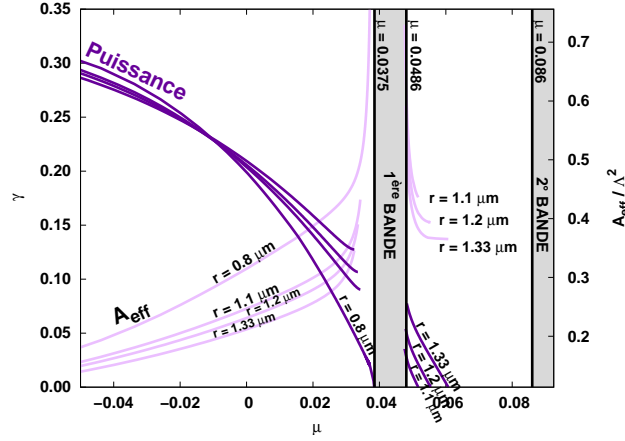


FIGURE 6.13 – Évolution de l'indice effectif et de l'aire effective normalisée pour le mode fondamental dans les cas périodique ($a = r = 0.8 \mu\text{m}$) et accepteur ($r = 1.1$, $r = 1.2$ et $r = 1.33 \mu\text{m}$) pour la FOM décrite dans la section 6.3.1. Les bandes grisées et blanches sont respectivement les bandes de conduction et les bandes interdites du cas linéaire périodique.

6.13). Nous vérifions (voir section 6.2.1) également que plus la taille du défaut augmente, plus l'indice effectif du mode est faible.

Dans le cas non-linéaire (puissance non nulle, $\gamma > 0$), l'indice effectif augmente. Ce phénomène a été observé dans le cas donneur, pour la fibre à saut d'indice et pour la FOM à cœur plein. De plus, à puissance fixée, l'indice effectif est d'autant plus fort que l'inclusion centrale est petite ce qui est semblable au cas donneur.

Pour la structure étudiée nous avons montré qu'il existe une limite minimale pour la taille de l'inclusion centrale. Pour obtenir cette limite, il suffit de modifier la taille du trou central jusqu'à ce que la valeur de μ du mode linéaire (correspondant à $\gamma = 0$) soit égale à la valeur $\mu = 0.0486$ de la limite de la première bande. Pour les simulations réalisées dans la FOM à défaut creux de cette étude, le rayon minimal de l'inclusion centrale est $r_{\min} = 1.015 \mu\text{m}$. Notons que nous pouvons déterminer cette limite en remarquant l'évolution asymptotique à son voisinage de l'aire effective du mode linéaire.

Il existe également une limite maximale pour la taille de l'inclusion centrale. Elle correspond au cas où l'inclusion centrale "touche" la première rangée d'inclusion d'air à savoir $r_{\max} = 1.5 \mu\text{m}$. La valeur de μ pour le cas linéaire ($\gamma = 0$) correspondant à cette taille de défaut est $\mu = 0.0686$.

Cependant, lorsque la solution *non-linéaire* se rapproche de la première bande de conduction définie dans la configuration périodique, l'aire effective *augmente* de manière asymptotique.

✱ **Point clé :**

Lorsque le mode accepteur se situe dans la première bande interdite finie, l'augmentation de la puissance (valeurs de γ croissantes) s'accompagne de la délocalisation de la solution non-linéaire dans la fibre optique. Ce phénomène est contre-intuitif en comparaison des phénomènes observés jusqu'à présent : fibre à saut d'indice, FOM à cœur plein et FOM à défaut creux dans le cas donneur. L'évolution asymptotique de l'aire effective au voisinage de la première bande de conduction ($\mu < 0.0486$) indique également une disparition du mode non-linéaire du défaut vers la structure.

□ **Dans la bande interdite semi-infinie ($\mu < 0.0375$) :**

Puis, si la puissance augmente encore, nous retrouvons un mode localisé autour du défaut après le passage de la première bande de conduction. Ce phénomène est semblable au cas "donneur Kerr négatif" étudié précédemment (section 6.3.2) mais cette fois avec une augmentation de l'indice effectif. Nous retrouvons alors l'effet non-linéaire étudié jusqu'ici : plus la puissance augmente, plus l'indice effectif augmente et plus l'aire effective diminue.

Dans cette région et au voisinage de la première bande de conduction ($0.0375 < \mu < 0.0486$), l'aire effective augmente de manière exponentielle indiquant une délocalisation du mode dans la structure.

À puissance fixée et telle que $\mu > -0.01$, plus le défaut est important plus l'indice effectif est faible. Pour les valeurs de $\mu < -0.01$, l'indice effectif augmente avec la taille du défaut : nous retrouvons bien les résultats du cas donneur (section 6.3.1 et figure 6.9).

6.4.2 Cas accepteur : deux solitons spatiaux !

L'étude de l'effet non-linéaire dans le cas accepteur est sensiblement plus délicate que pour les modes donneurs car la taille importante du défaut central ajoute une difficulté pour la recherche des solutions non-linéaires et à leur suivi au cours du processus itératif. En particulier, l'étude des solutions obtenues au voisinage de la première bande de conduction ($\mu \leq 0.0375$) doit être réalisée avec minutie et précision.

✎ **Remarque importante 31 :** Au début de l'étude des solutions non-linéaires dans les FOMs à défaut creux, nous avons utilisé l'algorithme à puissance fixée FP_{FEM} . En effet, le principe de l'étude des modes donneurs/accepteurs est d'étudier l'évolution de solutions non-linéaires lorsque la puissance injectée en entrée de l'algorithme augmente. Cependant, l'étude des solutions non-linéaires dans cette région particulière était impossible avec l'algorithme FP_{FEM} car nous ne pouvions pas suivre le mode qui se délocalisait entre la première et la seconde rangée de trous d'air. Grâce à l'algorithme SC_{Lin1D} que

nous proposons (plus stable dans ce cas), nous pouvons donc étudier les solutions non-linéaires obtenues au voisinage de la première bande de conduction. Rappelons que nous parlons de “puissance injectée” mais qu’il s’agit dans le cas de l’algorithme SC_{Lin1D} d’une puissance obtenue *a posteriori* qu’il faudrait injecter pour obtenir effectivement la solution non-linéaire concernée.

La figure 6.14 nous donne l’évolution complète de l’indice effectif en fonction de la puissance γ injectée et le résidu associé pour la longueur d’onde $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$ et pour un défaut de rayon $r = 1.2 \mu\text{m}$.

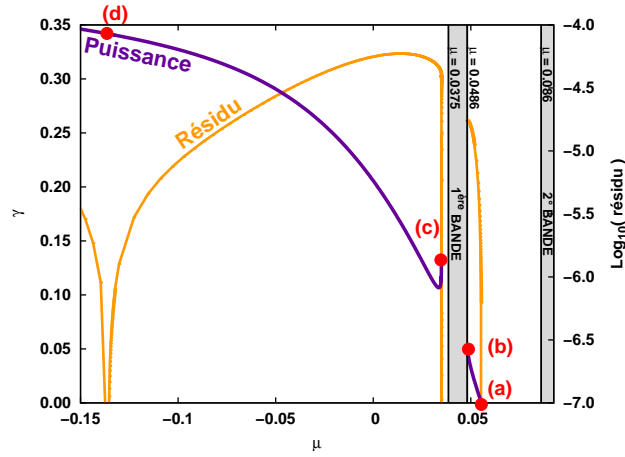


FIGURE 6.14 – Évolution complète de l’indice effectif et du résidu associé en fonction de la puissance des solutions non-linéaires dans le cas accepteur ($r = 1.2 \mu\text{m}$), à partir du mode fondamental linéaire et pour $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$. À chaque marque rouge (a), (b), (c) et (d) correspond un champ représenté dans la figure 6.15.

Concernant l’indice effectif (ou le paramètre μ), nous remarquons une remontée brutale [70, 59] à l’approche de la bande de conduction. Ceci signifie qu’il existe dans cette région des puissances pour lesquelles nous obtenons deux solutions non-linéaires. Cette partie de courbe montre un nouvel effet contre intuitif. Plus la puissance augmente, plus l’indice effectif diminue et comme nous le verrons dans la figure 6.15(c), plus la solution se délocalise dans fibre optique. Notons qu’au-delà de la limite en puissance (point (c)), le mode se délocalise entre la première et la seconde rangée d’inclusions d’air : ce n’est plus le mode que nous voulons étudier.

✪ Point clé :

L’évolution du résidu montre qu’il existe trois minima. Le premier est associé au cas linéaire pour $\gamma = 0$ (point (a) sur la figure 6.15), le second correspond au cas non-linéaire au voisinage de la première bande de conduction (point

(c)) et le troisième est associé à la solution non-linéaire auto-cohérente obtenue dans les différentes fibres étudiées jusqu'ici (point (d)). Du fait de la présence de deux minima dans l'évolution du résidu, obtenus dans le cas non-linéaire et d'après l'étude réalisée dans les chapitres précédents, nous pouvons penser qu'il existe deux solutions non-linéaires auto-cohérentes dans la FOM à défaut creux de type accepteur. Cependant, le second minimum ne correspond pas à une solution de haute puissance puisque la puissance à injectée pour l'obtenir est inférieure au soliton spatial du troisième minimum.

La figure 6.15 montre la répartition du champ obtenue dans la FOM à défaut creux de type accepteur. Chaque cas est marqué dans la figure 6.14 et correspond à une puissance particulière.

Comme nous l'avons montré dans la section 6.4.1, la figure 6.15(b) montre une délocalisation de la solution non-linéaire par rapport au cas linéaire (figure 6.15(a)) pour un défaut de rayon $r = 1.2 \mu\text{m}$ et pour $\mu > 0.0486$. La première solution non-linéaire auto-cohérente correspond à la figure 6.15(c) et montre que ce soliton spatial n'est pas fortement confiné dans le cœur. Ce n'est pas la solution non-linéaire de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable. De plus, les deux lobes entre la première et la seconde rangée de trous d'air indiquent que le champ va se délocaliser dans cette région (augmentation exponentielle de l'aire effective montrée par les figures 6.13 et 6.16). Il s'agit donc d'une configuration limite.

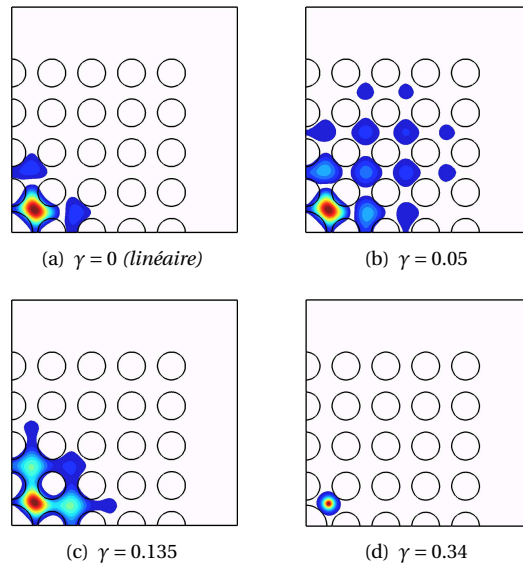


FIGURE 6.15 – Répartition du champ dans la FOM à défaut creux avec un défaut de rayon $r = 1.2 \mu\text{m}$ (configuration accepteur) et pour différentes puissances. À chaque figure correspond une marque rouge dans la figure 6.14.

La figure 6.15(d) correspond au troisième minimum de résidu et représente la solution non-linéaire auto-cohérente de plus haute puissance obtenue dans les autres fibres optiques précédemment étudiées. Pour $\mu = -0.14$, le champ est bien entendu confiné autour de l'inclusion centrale puisqu'il s'agit de la solution de plus haute puissance avant l'auto-focalisation instable.

La figure 6.16 complète la figure 6.13 et permet de montrer l'influence du défaut central dans la région voisine de la première bande de conduction ($\mu \approx 0.035$). Comme attendu, plus la taille du défaut est grande, plus la puissance à injecter pour obtenir la solution non-linéaire est importante. De plus, nous remarquons que la distance entre la valeur de μ de la solution auto-cohérente et la limite à $\mu = 0.0375$ augmente légèrement avec la taille du défaut. Ceci peut s'expliquer avec la figure 6.15(c) où nous remarquons la présence des deux lobes extérieurs qui, lorsque l'inclusion centrale augmente, ont tendance à se localiser plus rapidement entre la première et la seconde rangée de trous et former un autre mode. Le saut se produit donc pour une valeur de μ plus faible.

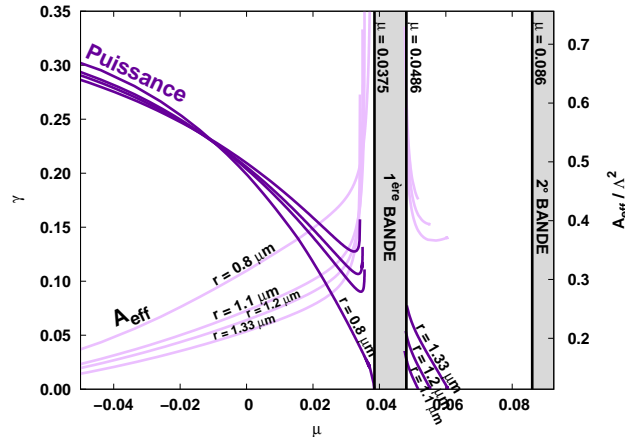


FIGURE 6.16 – Évolution complète de l'indice effectif et de l'aire effective en fonction de la puissance injectée dans le cas accepteur.

La solution non-linéaire auto-cohérente correspondant au deuxième minimum de résidu (au voisinage de la bande de conduction) semble être la combinaison linéaire de deux solutions : une solution non-linéaire de haute puissance et une solution non-linéaire du milieu périodique infini. Ce point reste cependant à vérifier.

Enfin, nous pouvons réaliser une étude sur l'influence de la taille finie de la fibre microstructurée. La première remarque concerne la géométrie. En effet, comme nous pouvons l'observer la symétrie $C_{4,v}$ est plus "compacte" que la symétrie $C_{6,v}$. Pour cette raison, l'influence de la structure finie est faible. L'effet le plus significatif

est pour le cas de la figure 6.15(b) puisque le champ se délocalise de manière importante. Cependant, l'influence n'est pas extrêmement significative pour être un facteur déterminant de cette étude.

6.4.3 Étude de l'effet Kerr négatif

La dernière étude concerne l'effet Kerr négatif. La figure 6.17 montre l'évolution de l'indice effectif en fonction de la puissance pour un défaut de rayon $r = 1.2 \mu\text{m}$.

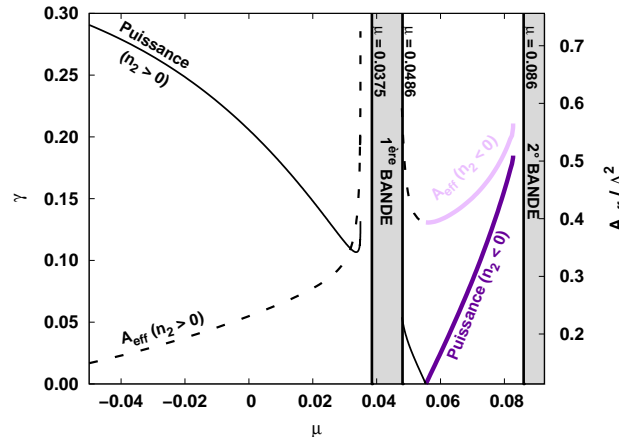


FIGURE 6.17 – Évolution de l'indice effectif et de l'aire effective normalisée en fonction de la puissance dans le cas de l'effet Kerr négatif pour le cas accepteur où $r = 1.2 \mu\text{m}$.

Comme attendu, plus la puissance augmente, plus l'indice effectif diminue et plus l'aire effective augmente. C'est le phénomène inverse de celui observé pour la configuration de l'effet Kerr positif. Ceci montre que plus la puissance augmente, plus la solution se délocalise dans la structure jusqu'à l'approche de la seconde bande de conduction. Enfin, notons qu'il n'existe pas de résidu minimum dans le cas d'un effet Kerr négatif.

Conclusion

L'ÉTUDE DE L'EFFET KERR dans les FOMs à défaut creux nous a permis de découvrir de nouveaux phénomènes non-linéaires. La taille de l'inclusion centrale formant le défaut creux distingue deux configurations. D'une part, le cas donneur correspond à la présence d'un défaut plus petit que les trous d'air environnants. D'autre part, le cas accepteur est étudié lorsque l'inclusion centrale est plus importante que les trous d'air formant la gaine de la fibre optique. L'étude linéaire préliminaire du cas périodique nous a servi à comprendre les phénomènes mis en jeu.

Nous avons alors implémenté l'algorithme SC_{Lin1D} dans les FOMs à défaut creux. Après une validation avec l'algorithme à puissance fixée, nous avons montré qu'il existe une unique solution non-linéaire auto-cohérente dans le cas donneur. De plus, les influences de la taille du défaut et de l'effet Kerr négatif ont été analysées. Le cas donneur nous a une nouvelle fois permis de valider l'algorithme et de comprendre les phénomènes mis en jeu. Puis, nous sommes passés au cas accepteur. Un effet contre-intuitif a été mis en évidence : plus la puissance augmente, plus le champ se délocalise dans la fibre optique ce qui est nouveau par rapport à toutes les études menées jusqu'à présent. Nous avons aussi montré numériquement la présence de deux solutions non-linéaires auto-cohérentes dans les FOMs à défaut creux de type accepteur. Enfin, les études de l'influence de la taille du défaut et de l'effet Kerr négatif ont également été réalisées.

Conclusion générale

L'ÉTUDE DE LA NON-LINÉARITÉ KERR DANS LES FOMs n'est qu'un aperçu de l'extraordinaire variété de possibilités offerte par l'interaction entre d'un côté le champ guidé et de l'autre le matériau composite matrice/inclusions. Toutefois, ceci permet déjà d'explorer de nombreux et nouveaux phénomènes dans les fibres optiques conventionnelles ou microstructurées. Dans cette perspective, nous avons choisi la recherche d'un nouveau type de solutions non-linéaires se démarquant de l'étude de l'équation de Schrödinger non-linéaire. Il s'agit d'une approche se basant directement sur les équations de Maxwell et permettant l'étude des phénomènes non-linéaires en tenant compte de la section transversale des fibres optiques. Dans ce travail exploratoire, nous nous sommes limités à l'étude des solutions non-linéaires correspondant au mode fondamental du problème linéaire.

◆ Vers une unique solution non-linéaire scalaire ...

La principale difficulté était bien évidemment de valider chaque étape car à notre connaissance, aucune étude similaire n'est disponible mise à part celle à puissance fixée publiée par A. Ferrando et *al.* en 2003. Le choix le plus judicieux était donc de considérer l'approximation scalaire pour mettre en place et valider la méthode ainsi que pour comprendre les phénomènes mis en jeu. Nous avons commencé par concevoir une méthode numérique efficace et précise pour la résolution d'un problème aux valeurs propres tout en conservant la spécificité du caractère non-linéaire. Pour cela, nous avons utilisé une méthode itérative de Picard complétée par une renormalisation du champ basée sur la minimisation d'un résidu pondéré. Ceci nous a permis de prendre en considération la caractère non-linéaire du problème à résoudre. C'est la principale originalité de notre algorithme. La modélisation des équations et des différentes fibres optiques s'est faite par l'utilisation de la Méthode des Éléments Finis. Cette méthode est particulièrement bien adaptée à la présence d'un indice de réfraction non-linéaire donc inhomogène et à la modélisation de structures complexes. La MEF associée à l'algorithme que nous avons imaginé constitue notre méthode numérique de résolution d'une non-linéarité Kerr dans les fibres optiques.

Dans un premier temps, le cas le plus simple a été étudié. Il s'agit de l'approche linéaire dans la fibre conventionnelle à saut d'indice puis étendue à la fibre optique microstructurée à cœur plein. La comparaison avec les méthodes FFF-MS et mul-

tipolaire a permis une première validation de notre méthode. Dans un deuxième temps, la non-linéarité dans les fibres à saut d'indice puis dans les FOMs a été étudiée. Au cours d'une analyse plus technique de la méthode, nous avons mis en lumière la sensibilité de notre algorithme à l'initialisation. Un balayage a été réalisé suivant l'amplitude de la solution initiale issue du problème linéaire puis suivant l'amplitude et la forme d'une fonction gaussienne prise comme point de départ. Nous avons obtenu un grand nombre de solutions que nous avons caractérisées en utilisant un critère de qualité : l'étude *a posteriori* de la valeur du résidu utilisé (et annulé) pour la renormalisation du champ. À partir de là, nous avons pu isoler les "bonnes" solutions correspondant au minimum de résidu (numériquement nul). De plus, au cours de cette étude nous avons amélioré la précision et la rapidité de l'algorithme par l'utilisation du maillage adapté et d'un algorithme classique de recherche du minimum par section en intervalles non égaux. Ainsi, par cette étude nous avons prouvé numériquement qu'il existe une unique solution non-linéaire auto-cohérente (ou soliton spatial) à chaque longueur d'onde fixée et pour chaque fibre optique modélisée.

◆ ... généralisant le soliton de Townes ...

Dans un deuxième temps, une étude de la signification physique de cette solution a été réalisée. Pour cela, nous avons comparé les résultats issus de l'algorithme à puissance fixée avec ceux de l'algorithme auto-cohérent que nous proposons. Ceci nous a permis de montrer que non seulement les résultats donnés par l'algorithme auto-cohérent étaient valides dans le cas non-linéaire mais aussi que la solution non-linéaire auto-cohérente correspondait à la solution de plus haute énergie avant l'auto-focalisation instable.

Au cours d'une étude des propriétés du soliton spatial en fonction de la longueur d'onde, nous avons montré que l'effet-non-linéaire tendait à contrecarrer l'effet de la dispersion dans la coupe transverse. Le confinement de la solution non-linéaire au centre des différentes fibres optiques étant important, nous nous sommes alors interrogés sur l'influence de la structure transverse et la taille finie des fibres optiques modélisées (à saut d'indice et microstructurées à cœur plein). Nous avons montré une dépendance significative du soliton spatial au profil transverse du guide : différentes tailles de cœur dans la fibre à saut d'indice et différentes tailles d'inclusions d'air dans la FOM à cœur plein.

De plus, nous avons comparé le soliton spatial obtenu avec notre méthode et le soliton de Townes, solutions non-linéaires de plus haute énergie respectivement dans les fibres optiques et dans le milieu homogène. Nous avons montré que le soliton de Townes (obtenu avec une méthode de tir) correspondait à la solution non-linéaire auto-cohérente (obtenue avec l'algorithme $SC_{Lin1D-Gold}$) dans le milieu homogène. Grâce à notre nouvelle approche et notamment la prise en compte de la constante de propagation β et du profil transverse particulier des géométries étudiées, nous avons donc pu généraliser le soliton de Townes aux fibres optiques à saut d'indice et microstructurées.

◆ ... et validée dans le cas vectoriel complet.

L'étude du profil de l'indice de réfraction du soliton spatial a montré que l'approximation scalaire n'était plus valable. Pour cette raison, la configuration vectorielle complète a été implémentée. Dans un premier temps, nous avons effectué la même étude que dans le cas scalaire. Au cours de l'étude technique de l'algorithme, il a été prouvé numériquement qu'il existait encore une unique solution non-linéaire auto-cohérente vectorielle quelle que soit la solution injectée en entrée. Par ailleurs, l'utilisation de l'algorithme à puissance fixée nous a permis de montrer que le soliton spatial correspondait à une solution de haute énergie mais pas de plus haute énergie avant l'autofocalisation instable du fait de l'influence de la composante longitudinale du champ. Dans ces conditions, la puissance à injecter pour obtenir le soliton spatial vectoriel est inférieure à celle à injecter pour mettre en évidence le soliton spatial scalaire.

Ensuite, la comparaison entre les modèles scalaire et vectoriel a montré que le passage au cas sans approximation était intéressant. Ceci nous a permis de vérifier que l'effet Kerr optique était suffisamment important pour invalider l'hypothèse justifiant de l'approximation scalaire. Enfin, nous retrouvons pour la configuration vectorielle les phénomènes observés dans le cas scalaire. Dans un premier temps, nous avons prouvé l'influence de la structure transverse sur les caractéristiques de la solution non-linéaire auto-cohérente dans le cas des fibres à saut d'indice et microstructurée. Dans un deuxième temps, l'étude du milieu homogène nous a permis de mettre en évidence l'existence d'un soliton spatial vectoriel dans cette structure. La similitude de l'évolution en longueur d'onde de son indice effectif et du profil d'indice avec le soliton de Townes scalaire nous permet d'affirmer qu'il existe également un soliton de Townes vectoriel.

◆ L'étude originale dans les FOMs à défaut creux.

L'étude de la non-linéarité dans les fibres optiques microstructurées à défaut creux a permis d'étendre la validité et le domaine d'application de la nouvelle méthode numérique proposée. Dans ces conditions, la propagation n'est plus satisfaite par la réflexion totale interne modifiée mais par bandes interdites photoniques ce qui nous oblige à modifier l'approche théorique.

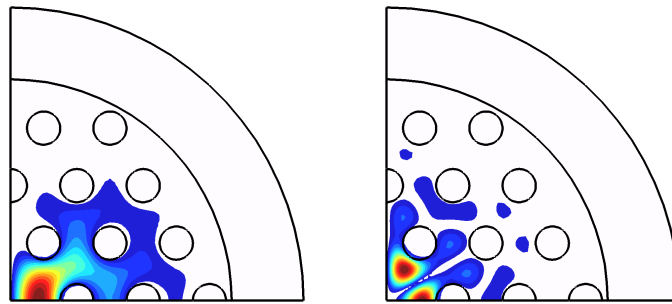
Pour cette étude, il a fallu distinguer le cas donneur (taille du défaut central inférieure aux inclusions environnantes) du cas accepteur (défaut plus grand que les inclusions l'entourant). Nous nous sommes également intéressés à l'effet Kerr négatif afin d'élargir davantage le domaine d'étude. Pour les modes donneurs, des phénomènes conformes à l'intuition ont été observés : pour l'effet Kerr positif, plus la puissance augmente, plus le champ se confine (bande interdite semi-infinie) dans la fibre et inversement pour l'effet Kerr négatif. De plus, le soliton spatial (correspondant à un résidu minimum) de haute énergie a été mise en évidence. Ces résultats ont également été vérifiés dans les cas où nous modifions la taille du défaut.

Pour les modes accepteurs, des phénomènes nouveaux et contre-intuitifs ont été observés. Pour l'effet Kerr positif et pour de faibles puissances, le champ non-

linéaire se délocalise (première bande interdite finie) avant de se refocaliser (bande interdite semi-infinie) dans la fibre pour des puissances plus importantes. Grâce à l'étude du résidu, nous avons mis en évidence deux solutions non-linéaires auto-cohérentes : la première de haute énergie précédemment étudiée dans les fibres optiques à saut d'indice et les FOMs à cœur plein et la deuxième correspondant au couplage entre un mode de défaut et un mode de structure. Tous les phénomènes étudiés ont été observés pour différentes tailles de défauts.

◆ De nombreuses études restent à faire ...

La première idée venant à l'esprit est l'étude des modes d'ordres supérieurs. En effet, nous nous sommes intéressés au cas du mode fondamental par soucis de simplicité et afin de comprendre le rôle de la non-linéarité Kerr dans les fibres optiques. Cependant, nous pourrions nous intéresser à d'autres modes de symétrie plus complexe comme le montre les figures ci-dessous.



Dans le cadre de cette approche, nous avons étudié les solitons spatiaux dans la dimension transverse finie de la fibre optique ou du milieu homogène. Cependant, une étude de la stabilité suivant la dimension longitudinale pourrait être envisagée à cours terme. Dans la référence [25], une étude a déjà été réalisée et nous pourrions nous baser sur cette dernière pour l'étendre à notre modèle.

Pour le cas vectoriel, une étude plus complète aurait été de considérer un effet Kerr optique tensoriel. De ce fait, suivant les composantes du champ considérées, la permittivité relative ϵ_r caractérisant l'effet Kerr optique peut être différente [22, 42, 43, 18, 19]. Dans ce cas, nous devrions définir un coefficient χ tensoriel.

Les fibres optiques microstructurées offrant un grand nombre de degrés de liberté, des études peuvent être réalisées suivant le contraste d'indice entre matrice et inclusions circulaires ou encore selon d'autres symétries de fibre afin de moduler les effets non-linéaires. En particulier, si le contraste d'indice est inversé de sorte que la matrice devienne de bas indice et les inclusions circulaires de haut indice alors nous pourrions étudier l'effet Kerr optique dans les fibres de type ARROW

[58, 61].

Notons que l'étude numérique que nous avons réalisée au cours de cette thèse s'inscrivait dans une volonté de mettre en place un modèle original permettant de définir une nouvelle vision de la non-linéarité dans les fibres optiques. Cette étude nous a permis de découvrir de nombreux phénomènes nouveaux comme nous avons pu le voir. Dans cette perspective, il reste donc de nombreuses questions en suspens qui pourraient être résolues en se basant sur notre premier travail.

Chapitre

A

Systèmes d'unités en optique non-linéaire et analyse dimensionnelle

Deux principaux systèmes d'unités sont utilisés en optique non-linéaire : le système gaussien et le système MKS (mètre, kilogramme, seconde)[2]. Pour simplifier, nous allons considérer le cas de la polarisation, il s'agit de l'équation (1.10).

A.1 Les systèmes d'unités utiles pour un problème non-linéaire

□ Le système gaussien

Dans ce système, que nous n'utilisons pas dans ce rapport, nous considérons la polarisation suivante

$$\mathbf{P}(t) = \chi^{(1)} \mathbf{E}(t) + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2(t) + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(t) + \dots \quad (\text{A.1})$$

Dans ce cas, nous avons

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{E}] = \frac{\text{statV}}{\text{cm}} = \frac{\text{statC}}{\text{cm}^2} \quad (\text{A.2})$$

où $1\text{V} = 1/299.8 \text{ statV}$ et $1\text{C} = 2.998.10\text{e-}9 \text{ statC}$. Dans ces conditions,

$$[\chi^{(1)}] = 1 \quad \text{et} \quad [\chi^{(3)}] = \left[\frac{1}{\mathbf{E}^2} \right] = \frac{\text{cm}^2}{\text{V}^2}. \quad (\text{A.3})$$

□ Le système MKS

Il s'agit de celui *utilisé dans ce rapport* et qui donne d'après les équations (1.7), (1.10) et (1.11)

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \left[\chi^{(1)} \mathbf{E}(t) + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2(t) + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3(t) + \dots \right] \quad (\text{A.4})$$

avec $\epsilon_0 = 8.85 * 10^{-12} F.m^{-1}$ qui est la permittivité dans le vide. De plus,

$$[\mathbf{P}] = \frac{C}{m^2} \quad \text{et} \quad [\mathbf{E}] = \frac{V}{m}. \quad (\text{A.5})$$

Comme nous savons qu'un farad représente un coulomb par volt ($F = C/V$), alors nous en déduisons que

$$[\chi^{(1)}] = 1 \quad \text{et} \quad [\chi^{(3)}] = \left[\frac{1}{\mathbf{E}^2} \right] = \frac{m^2}{V^2}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Analyse dimensionnelle des grandeurs utilisées

Dans la section 1.3, nous utilisons deux indices n_2 et $n_2^{(I)}$ avec des unités différentes. Tout d'abord concernant n_2 , nous avons $n_2 = 3\chi^{(3)}/8n_0$, donc une analyse dimensionnelle dans le système MKS donne

$$[n_2] = [\chi^{(3)}] = \left[\frac{1}{\mathbf{E}^2} \right] = \frac{m^2}{V^2}. \quad (\text{A.7})$$

Puis, concernant $n_2^{(I)}$, nous avons $n_2^{(I)} = 3\chi^{(3)}/4\epsilon_0 c n_0^2$, une analyse dimensionnelle dans le système MKS donne alors

$$[n_2^{(I)}] = \left[\frac{\chi^{(3)}}{\epsilon_0 c} \right] = \frac{m^2}{V^2} \frac{Vms}{Cm} = \frac{m^2 s}{CV}. \quad (\text{A.8})$$

Or, nous savons qu'une puissance est une énergie sur un temps donc une analyse dimensionnelle donne

$$[P] = W = \left[\frac{\text{énergie}}{\text{temps}} \right] = \left[\frac{qU}{\text{temps}} \right] = \frac{CV}{s}. \quad (\text{A.9})$$

où q représente une charge et U un potentiel. Nous en déduisons donc que

$$\boxed{[n_2^{(I)}] = \frac{m^2}{W}}. \quad (\text{A.10})$$

Chapitre

B

Présentation et utilisation des PMLs dans le cadre de cette étude

B.1 Présentation des PMLs utilisées dans cette étude

Les PMLs sont des couches parfaitement adaptées (ou en anglais “Perfect Matching Layers”) [39, 33] qui permettent de calculer avec précision la partie imaginaire des grandeurs que nous voulons étudier. Cette partie imaginaire représente physiquement les pertes dans la dimension transverse de la fibre. Il ne s’agit pas ici des pertes dues à la propagation dans la dimension longitudinale de la fibre optique.

Dans le cadre de notre étude, les pertes sont :

- nulles dans le cas du mode fondamental linéaire pour la fibre à saut d’indice (mode guidé dans la région de haut indice)
- nulles pour la solution non-linéaire issue du mode fondamental linéaire dans la fibre à saut d’indice
- nulles pour la solution non-linéaire issue du mode fondamental linéaire dans la FOM.

Il n’y a donc des pertes que pour les fibres optiques microstructurées dans le cas du cas linéaire.

Pour l’étude des solutions linéaires dans les FOMs, les PMLs dans les cas scalaire et vectoriel sont implémentées de manière identique. De plus, il s’agit de PMLs circulaires du fait de la géométrie particulière des fibres optiques. Comme nous l’avons évoqué dans le paragraphe 3.2.3, il nous suffit de modifier la permittivité relative dans la zone de transition $\epsilon_{r,0}^{Z.T.}$ de la fibre (FIG. 3.4(a)) en introduisant un tenseur correspondant aux caractéristiques de la PML :

$$\epsilon_{r,0}^{Z.T.} \rightarrow T_{PML} \epsilon_{r,0}^{Z.T.} \quad (B.1)$$

L'obtention du tenseur T_{PML} représentant les caractéristiques de la couche parfaitement adaptée dans le cas circulaire a déjà été réalisée [32]. Plusieurs grandeurs y sont alors définies. Nous posons $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ correspondant à un point quelconque dans la zone PML et

$$s_r = 1.0 + i\alpha \quad (B.2)$$

représentant le coefficient d'absorption sans dimension α . De plus, nous posons

$$q = \frac{1}{\rho} \left(\frac{R_{int}}{s_r} + \rho - R_{int} \right) \quad (B.3)$$

où R_{int} représente le rayon intérieur de la PML (voir la figure B.1). Enfin, nous posons

$$\tau = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (B.4)$$

l'angle en coordonnées cylindriques suivant la position du point considéré.

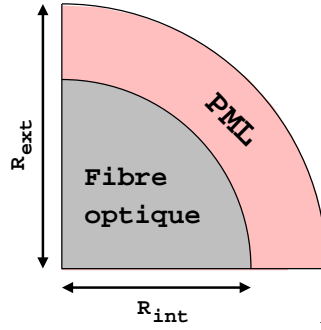


FIGURE B.1 – Position de la PML circulaire autour de la fibre optique. R_{int} représente le rayon intérieur de la PML et R_{ext} son rayon extérieur.

Avec ces changements de variables, nous pouvons expliciter le tenseur T_{PML} caractérisant la zone PML autour de la fibre optique microstructurée :

$$T_{PML} = \begin{bmatrix} q \cos^2(\tau) + \frac{\sin^2(\tau)}{q} & \cos(\tau) \sin(\tau) \left(q - \frac{1}{q} \right) & 0 \\ \cos(\tau) \sin(\tau) \left(q - \frac{1}{q} \right) & q \sin^2(\tau) + \frac{\cos^2(\tau)}{q} & 0 \\ 0 & 0 & s_r^2 q \end{bmatrix}$$

B.2 Utilisation des PMLs et paramètres importants

Pour adapter au mieux la PML, trois paramètres sont importants :

- la maillage
- le coefficient d'absorption α
- le rayon intérieur R_{int} de cette zone.

Tout d'abord, le maillage doit être affiné sur le bord intérieur de la PML pour approximer au mieux le champ là où il est encore important.

De plus, ces paramètres doivent être choisis pour que la décroissance du champ dans la PML soit telle que le champ arrivant dans cette région soit nul au bord extérieur de la PML sans s'atténuer trop vite (cas (a) de la figure B.2). Si le champ n'est pas nul sur le bord extérieur (cas (b) de la figure B.2) ou s'il s'atténue trop vite (cas (c) de la figure B.2), alors la couche absorbante n'est pas parfaitement adaptée.

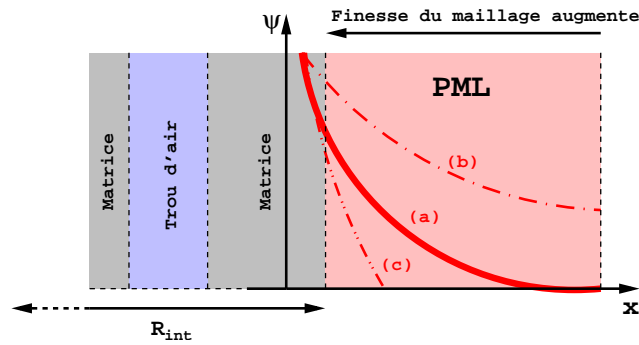


FIGURE B.2 – Coupe longitudinale du champ dans une PML entourant une FOM dans le cas idéal (a) et dans deux cas mal adaptés (b) et (c). Trois paramètres sont à régler : le coefficient d'absorption α et le maillage (dans la PML), le rayon intérieur R_{int} .

B.3 Optimisation des PMLs dans le cas des fibres optiques

Nous étudions alors l'influence des paramètres permettant l'implémentation rigoureuse des couches absorbantes. Les paramètres importants (avec le maillage) sont :

- ✓ le rayon intérieur R_{int} ou plus précisément l'écart entre la dernière rangée de trous d'air et la PML (FIG. B.4)
- ✓ le coefficient d'absorption α de la région PML (FIG. B.5).

Nous considérons dans cette étude une fibre optique microstructurée à deux ou trois rangées de trous d'air de rayon $a = 1.0 \mu\text{m}$, de pitch $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ et à la longueur d'onde $\lambda = 1.56 \mu\text{m}$. La partie linéaire de l'indice de réfraction est $n_0 = 1.4439035654$ [20]. Enfin, il n'y a pas d'effet non-linéaire pris en compte dans les résultats présentés ci-dessous car, comme nous l'avons montré, les pertes sont nulles dans ce cas.

B.3.1 Dans le modèle scalaire

La figure B.3 montre l'évolution du logarithme de la partie imaginaire de l'indice effectif en fonction du coefficient d'absorption α et pour différent éloignement δ_{PML} entre la dernière rangée d'inclusions d'air et la PML. δ_{PML} est défini tel que

$$\delta_{PML} = R_{int} - (N_r \Lambda + a) \quad (\text{B.5})$$

où N_r est le nombre de rangées d'inclusions, Λ le pitch et a le rayon d'un trou d'air. Cette distance est représentée sur la figure B.3 par le rayon intérieur R_{int} . Dans le cas d'une FOM à deux rangées de trous d'air, le bord extérieur de la dernière inclusion est situé à $(N_r \Lambda + a) = 5.1 \mu\text{m}$ du centre de la fibre.

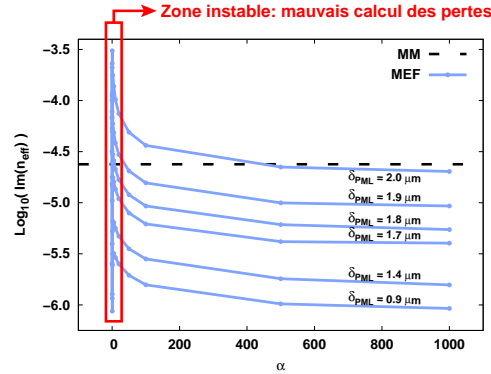


FIGURE B.3 – Influence du coefficient d'absorption α et de l'éloignement de la PML pour l'évaluation des pertes dans la FOM décrite dans cette annexe. Représentation de la valeur des pertes obtenue avec la Méthode Multipolaire.

Tout d'abord, nous remarquons que le coefficient d'absorption α joue un rôle important dans l'évaluation des pertes. En effet, la figure B.3 montre que pour des faibles valeurs de α , l'évolution de la partie imaginaire de l'indice effectif n'est pas stabilisée. En revanche, pour $\alpha > 500$, l'évolution de la partie imaginaire de l'indice effectif est quasiment constante. Ainsi, pour des valeurs de $\alpha > 500$, les pertes peuvent être correctement calculées dans le modèle scalaire.

Le deuxième paramètre important dans la mise en place de la PML autour de la fibre optique est le rayon intérieur R_{int} . En effet, la fibre optique microstructurée à

cœur plein est constituée d'un réseau fini d'inclusions d'air où le cœur correspond à un défaut (omission d'une inclusion). Si la distance entre la dernière rangée de trous et le début de la PML est trop important, le mode fondamental considéré ne "voit" plus le cœur comme le défaut mais la région entre les inclusions et la PML. Le champ se localise alors dans cette région et ne représente plus le mode que nous voulons étudier. Ainsi, la valeur de R_{int} ne doit pas être trop importante. À l'inverse, si la valeur de R_{int} est trop faible, le champ sera trop fort à l'interface FOM/PML et les pertes seront mal calculées à l'intérieur de la PML.

La figure B.3 montre que les pertes sont de mieux en mieux calculées au fur et à mesure de l'éloignement de la PML par rapport à la dernière rangée de trous. La meilleure valeur de R_{int} amenant à l'évaluation la plus précise des pertes correspond, comme nous l'avons observé, à la limite (R_{int} critique) à partir de laquelle le champ se délocalise entre la dernière rangée de trous et la PML.

B.3.2 Dans le modèle vectoriel

Contrairement au modèle scalaire, nous remarquons (figure B.4) que la distance δ_{PML} entre la dernière rangée de trous d'air et la PML n'a pas d'influence quant à l'évaluation des pertes. En effet, dans les cas d'une fibre optique microstructurée à deux et trois couches d'inclusions, la partie imaginaire de l'indice effectif reste constante pour la configuration vectorielle.

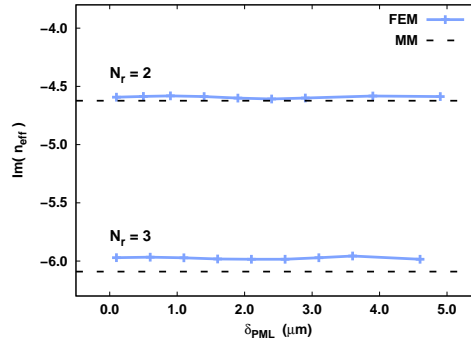


FIGURE B.4 – Évolution de la partie imaginaire de l'indice effectif suivant la distance δ_{PML} définie par la relation (B.5) pour une FOM à deux et trois rangées d'inclusions. Représentation de la valeur des pertes obtenue avec la Méthode Multipolaire.

Le deuxième paramètre influant est la coefficient d'absorption α de la PML. La figure B.5 montre que, contrairement au cas scalaire, plus la valeur de α est importante, plus l'évaluation de la partie imaginaire de l'indice effectif est mauvaise. Dans ce cas, nous devons choisir une valeur de α de l'ordre de l'unité et ce pour les différentes FOMs étudiées.

Ainsi, à partir de cette étude réalisée dans les configurations scalaire et vectorielle linéaires, nous avons optimisé l'implémentation des PMLs pour calculer le

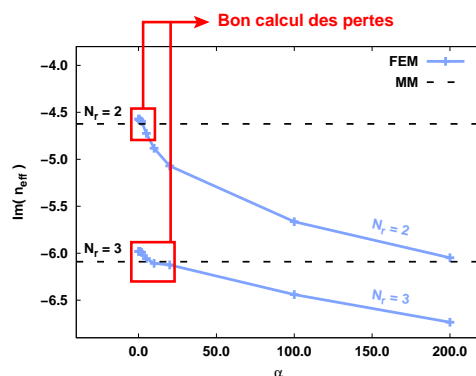


FIGURE B.5 – Évolution de la partie imaginaire de l'indice effectif suivant le coefficient d'absorption α pour une FOM à deux et trois rangées d'inclusions. Représentation de la valeur des pertes obtenue avec la Méthode Multipolaire.

plus précisément possible les pertes avec la Méthode des Éléments Finis.

Chapitre

C

Puissance de Poynting dans le cas scalaire

À partir de la définition du vecteur de Poynting, nous pouvons définir la puissance P dans le cas scalaire comme :

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{e}_z dS. \quad (\text{C.1})$$

Dans le cas scalaire, nous cherchons des solutions de la forme :

$$\mathbf{E} = \phi(x, y) e^{i\beta z - i\omega t} \mathbf{e}_x. \quad (\text{C.2})$$

Les équations de Maxwell donnent :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mathbf{B} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \quad (\text{C.3})$$

Nous pouvons en déduire \mathbf{H} tel que :

$$\mathbf{H} = \frac{-i}{\omega \mu_0} \nabla \times \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}^* = \frac{i}{\omega \mu_0} \nabla \times \mathbf{E}^*. \quad (\text{C.4})$$

Nous calculons alors le produit vectoriel $\nabla \times \mathbf{E}$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \phi(x, y) e^{i\beta z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\beta \phi(x, y) e^{i\beta z} \\ -\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} e^{i\beta z} \end{pmatrix}$$

et il vient en remplaçant $\nabla \times \mathbf{E}^*$ dans l'Éq. (C.4) :

$$\mathbf{H}^* = \frac{i}{\omega\mu_0} \left(-i\beta\phi(x, y)e^{-i\beta z}\mathbf{e}_y - \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}e^{-i\beta z}\mathbf{e}_z \right). \quad (\text{C.5})$$

Comme $e^{i\beta z}e^{-i\beta z} = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* &= \frac{i}{\omega\mu_0} \left(-i\beta|\phi(x, y)|^2\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y - \phi(x, y)\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z \right) \\ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* &= \frac{i}{\omega\mu_0} \left(-i\beta|\phi(x, y)|^2\mathbf{e}_z - \phi(x, y)\frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y}(-\mathbf{e}_y) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Nous pouvons alors en déduire l'expression de P en injectant l'équation (C.6) dans l'équation (C.1)

$$P = \frac{\beta}{2\omega\mu_0} \int_{\Omega} |\phi(x, y)|^2 dS \quad (\text{C.7})$$

or, $k_0/\omega = 1/c$ où $k_0 = 2\pi/\lambda$ donc $\omega = k_0 c$ et donc :

$$P = \frac{\beta}{2k_0 c \mu_0} \int_{\Omega} |\phi(x, y)|^2 dS. \quad (\text{C.8})$$

De plus, nous savons que $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, l'expression finale de P est donc :

$$P = \frac{\beta\epsilon_0 c}{2k_0} \int_{\Omega} |\phi(x, y)|^2 dS \quad (\text{C.9})$$

vérifiée dans la littérature et notamment dans les références [9, 31]. D'après l'annexe A, nous savons que la dimension de $\epsilon_0 c$ est

$$[\epsilon_0 c] = \frac{Cm}{Vm_s} = \frac{C}{Vs}. \quad (\text{C.10})$$

De plus, la dimension de ϕ est celle d'un champ d'après la relation (C.2)

$$[\phi] = \frac{V}{m}. \quad (\text{C.11})$$

Dans ces conditions,

$$[P] = \frac{C}{Vs} \frac{V^2}{m^2} m^2 = \frac{CV}{s} = W. \quad (\text{C.12})$$

En posant $n_{eff} = \beta/k_0$ l'indice effectif, nous obtenons la puissance physique P_{phys} dans le modèle scalaire

$$P_{phys} = \frac{\epsilon_0 c n_{eff}}{2} \int_{\Omega} |\phi(x, y)|^2 dS \quad (\text{en watt}) \quad (\text{C.13})$$

Communications scientifiques

Publications :

A. Nicolet, F. Drouart, G. Renversez, C. Geuzaine, *A finite element analysis of spatial solitons in optical fibres*, COMPEL, **26**, pp. 1105-1113 (2007).

F. Drouart, G. Renversez, A. Nicolet, C. Geuzaine, *Spatial Kerr solitons in optical fibres of finite size cross section : beyond the Townes soliton*, J. Opt. A : Pure Appl. Opt., **10** (2008).

Conférences et séminaires pour la présentation de ce travail : (Réalisées par André Nicolet, Gilles Renversez et Fabien Drouart)

- GDR Ondes, (Besançon - Novembre 2005), *Modélisation de l'effet Kerr dans une fibre à saut d'indice par la méthode des éléments finis : prise en compte de la section de la fibre.*
- GDR Ondes, (Orsay - Juin 2006), *Modélisation de l'effet Kerr dans des fibres conventionnelles et microstructurées par la méthode des éléments finis : prise en compte de la section de la fibre.*
- Etopim 7, (Sydney - juillet 2006), (présentation A. Nicolet), *A finite element analysis of spatial solitons in optical fibres.*
- EMF 2006, (Aussois - mai 2006), (présentation A. Nicolet), *A Scalar Finite Element Model for Spatial Solitons in Optical Fibres.*
- EPNC 2006, (Maribor (Slovénie) - Juin 2006), (présentation A. Nicolet) *A Finite Element Analysis Of Spatial Solitons In Optical Fibres.*
- European Optical Society (EOS), (Paris - Octobre 2006), *Spatial solitons in optical fibers : self-coherent solutions of the propagation equation with a Kerr nonlinearity.*
- Numélec 2006, (Lille - novembre-décembre 2006) (présentation A. Nicolet) *Analyse par éléments finis de solitons spatiaux dans les fibres optiques.*

- SPIEG, (Prague - Avril 2007), *Spatial solitons in microstructured optical fibers with a Kerr nonlinearity*.
- Compumag 2007, (Aachen (All) - juin 2007), *Vector versus Scalar Spatial Solitons in Microstructured Optical Fibres*.
- Journées Nationales d'Optique Guidée (JNOG), (Grenoble - Juillet 2007), *Solitons spatiaux dans les fibres optiques conventionnelles et microstructurées : obtention d'une solution auto-cohérente par une méthode éléments finis*.
- International Conference on Materials for Advanced Technologies (ICMAT), (Singapour - 2007), (présentation G. Renversez), *Donor and acceptor modes in nonlinear microstructured optical fibers*.

📁 Collaboration internationale :

- Séjour à Valence (ESP) avec l'équipe du Professeur Albert Ferrando précurseur dans l'étude des solitons spatiaux dans les fibres optiques microstructurées au moyen d'autres outils numériques.

Bibliographie

Références des livres

- [1] G. P. AGRAWAL, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, 3 ed., 2001.
- [2] R. W. BOYD, *Nonlinear Optics*, Academic Press, San Diego, 2 ed., 2003.
- [3] P. N. BUTCHER AND D. N. COTTER, *The Elements of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [4] C. H. DURNEY AND C. C. JOHNSON, *Introduction to Modern Electromagnetics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
- [5] J. D. JOANNOPOULOS, R. D. MEADE, AND J. N. WINN, *Photonic Crystals : Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, 1995.
- [6] Y. S. KIVSHAR AND G. P. AGRAWAL, *Optical Solitons : From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, San Diego, 2003.
- [7] P. LASCAUX AND R. THÉODOR, *Analyse Numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, Dunod 2^o édition, 1994.
- [8] J. M. LOURTIOZ, H. BENISTY, V. BERGER, AND J. M. GÉRARD, *Les cristaux photoniques ou la lumière en cage*, Hermes Science Publications, 2003.
- [9] D. MARCUSE, *Light Transmission Optics*, Bell Laboratories Series, New Jersey, 1972.
- [10] M. NEVIÈRE AND E. POPOV, *Light propagation in periodic media ; differential theory and design*, Marcel Dekker, New York, Basel and Honk Kong, 2003.
- [11] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, AND B. FLANNERY, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1992.
- [12] F. SANCHEZ, *Optique non-linéaire*, Ellipses, 1999.
- [13] Y. R. SHEN, *Principles of Nonlinear Optics*, Wiley, New York, 1984.
- [14] A. W. SNYDER AND J. D. LOVE, *Optical Waveguide Theory*, Chapman and Hall, New York, 1983.
- [15] J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
- [16] L. N. TREFETHEN AND D. BAU, *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

- [17] F. ZOLLA, G. RENVERSEZ, A. NICOLET, B. KUHLMMEY, S. GUENNEAU, AND D. FELBACQ, *Foundations of Photonic Crystal Fibres*, Imperial College Press, London, 2005.

Références des articles importants utilisés

- [18] B. CROSIGNANI, A. CUTOLO, AND P. D. PORTO, *Coupled-mode theory of nonlinear propagation in multimode and single-mode fibers : envelope solitons and self-confinement*, J. Opt. Soc. Am., 72 (1982), pp. 1136–1141.
- [19] B. CROSIGNANI, P. D. PORTO, AND A. YARIV, *Nonparaxial equation for linear and nonlinear optical propagation*, Opt. Lett., 22 (1997), pp. 778–780.
- [20] P. BOYER, G. RENVERSEZ, E. POPOV, AND M. NEVIÈRE, *Improved differential method for microstructured optical fibres*, J. Opt. A : Pure Appl. Opt., 9 (2007), pp. 728–740.
- [21] R. Y. CHIAO, E. GARMIRE, AND C. H. TOWNES, *Self-trapping of optical beams*, Phys. Rev. Letters, 12 (1964), pp. 479–482.
- [22] A. CIATTONI, B. CROSIGNANI, P. D. PORTO, AND A. YARIV, *Perfect optical solitons : spatial kerr solitons as exact solutions of maxwell's equations*, J. Opt. Soc. Am. B, 22 (2005), pp. 1384–1394.
- [23] F. DROUART, G. RENVERSEZ, A. NICOLET, AND C. GEUZAIN, *Spatial kerr solitons in optical fibres of finite size cross section : beyond the townes soliton*, J. Opt. A : Pure Appl. Opt., 10 (2008).
- [24] A. FERRANDO, E. SILVESTRE, J. J. MIRET, P. ANDRÉS, AND M. V. ANDRÉS, *Donor and acceptor guided modes in photonic crystal fibers*, Opt. Lett., 25 (2000), pp. 1328–1330.
- [25] A. FERRANDO, M. ZACARÉS, P. F. DE CÓRDOBA, D. BINOSI, AND J. A. MONSORIU, *Spatial soliton formation in photonic crystal fibers*, Opt. Express, 11 (2003), pp. 452–459.
- [26] A. FERRANDO, M. ZACARÉS, P. F. DE CÓRDOBA, D. BINOSI, AND J. MONSORIU, *Vortex solitons in photonic crystal fibers*, Opt. Express, 12 (2004), pp. 817–822.
- [27] G. FIBICH AND A. L. GAETA, *Critical power for self-focusing in bulk media and in hollow waveguides*, Optics Letters, 25 (2000), pp. 335–337.
- [28] T. FUJISAWA AND M. KOSHIBA, *Finite element characterization of chromatic dispersion in nonlinear holey fibers*, Opt. Express, 11 (2003), pp. 1481–1489.
- [29] B. KUHLMMEY, R. MCPHEDRAN, AND C. DE STERKE, *Bloch method for the analysis of modes in microstructured optical fibers*, Opt. Express, 12 (2004), pp. 1769–1774.
- [30] A. NICOLET, F. DROUART, G. RENVERSEZ, AND C. GEUZAIN, *A finite element analysis of spatial solitons in optical fibres*, Compel, 26 (2007), pp. 1105–1113.
- [31] R. A. SAMMUT AND C. PASK, *Gaussian and equivalent-step-index approximations for nonlinear waveguides*, J. Opt. Soc. Am. B, 8 (1991), pp. 395–402.

Références diverses

- [32] Y. O. AGHA, *Transformations géométriques réelles et complexes : application à la recherche de modes à pertes dans les fibres optiques microstructurées*, PhD thesis, Institut Fresnel, Marseille, 2007.
- [33] Y. O. AGHA, F. ZOLLA, A. NICOLET, AND S. GUENNEAU, *On the use of pml for the computation of leaky modes : An application to microstructured optical fibres*, *Compel*, 27 (2008), pp. 95–109.
- [34] N. AKHMEDIEV, A. ANKIEWICZ, AND J. M. SOTO-CRESPO, *Does the nonlinear schroedinger equation correctly describe beam propagation?*, *Opt. Lett.*, 18 (1993), pp. 411–413.
- [35] R. R. ALFANO AND S. L. SHAPIRO, *Emission in the re-gion 4000 to 7000Å via four-photon coupling in glass*, *Phys. Rev. Lett.*, 24 (1970), pp. 584–587.
- [36] ———, *Observation of self-phase modulation and small-scale filaments in crystals and glasses*, *Phys. Rev. Lett.*, 24 (1970), pp. 592–595.
- [37] J. L. AUGUSTE, J. M. BLONDY, AND P. ROY, *La fibre optique microstructurée air-silice*, *Techniques de l'Ingénieur*, 43 (2005).
- [38] P. BOYER, E. POPOV, M. NEVIERE, AND G. RENVERSEZ, *Diffraction theory : Application of the fast fourier factorization to cylindrical devices with arbitrary cross section lighted in conical mounting*, *J. Opt. Soc. Am. A*, 23 (2006), pp. 1146–1158.
- [39] J. P. BÉRENGER, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, *Journal of Computational Physics*, 114 (1994), pp. 185–200.
- [40] L. BRILLAND, F. SMEKTALA, G. RENVERSEZ, T. CHARTIER, J. TROLES, T. NGUYEN, N. TRAYNOR, AND A. MONTEVILLE, *Fabrication of complex structures of holey fibers in chalcogenide glass*, *Opt. Express*, 14 (2006), pp. 1280–1285.
- [41] Y. CHEN AND J. ATAI, *Maxwell's equations and the vector nonlinear schrödinger equation*, *Phys. Rev. E*, 55 (1997), pp. 3652–3657.
- [42] A. CIATTONI, B. CROSIGNANI, P. D. PORTO, AND A. YARIV, *Perfect optical solitons : spatial kerr solitons as exact solutions of maxwell's equations*, *J. Opt. Soc. Am. B*, 22 (2005), pp. 1384–1394.
- [43] A. CIATTONI, P. D. PORTO, B. CROSIGNANI, AND A. YARIV, *Vectorial nonparaxial propagation equation in the presence of a tensorial refractive-index perturbation*, *J. Opt. Soc. Am. B*, 17 (2000), pp. 809–819.
- [44] S. FORTUNE, *Voronoi diagrams and delaunay triangulations*, *Computing in Euclidean Geometry*, (1992), pp. 193–233.
- [45] P. L. GEORGE AND H. BOROUCHAKI, *Aspects of 2d delaunay mesh generation*, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 40 (1997), pp. 1957–1975.
- [46] S. GUENNEAU, S. LASQUELLEC, A. NICOLET, AND F. ZOLLA, *Design of photonic band gap optical fibers using finite elements*, *Compel*, 21 (2002), pp. 534–539.

- [47] S. GUENNEAU, A. NICOLET, F. ZOLLA, AND S. LASQUELLEC, *Modeling of photonic crystal optical fibers with finite elements*, J. Opt. Soc. Am. B, 38 (2002), pp. 1261–1264.
- [48] P. R. ISAAC, *Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides — i : Summary of results*, IEEE Trans. on Microwave Theory Tech., 23 (1975), pp. 421–429.
- [49] ———, *Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides — ii : Theory*, IEEE Trans. on Microwave Theory Tech., 23 (1975), pp. 429–433.
- [50] S. JOHN, *Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices*, Phys. Rev. Letters, 58 (1987), pp. 2486–2489.
- [51] P. L. KELLEY, *Self-focusing of optical beams*, Phys. Rev. Letters, 15 (1965), pp. 1005–1008.
- [52] J. C. KNIGHT, T. A. BIRKS, P. S. J. RUSSELL, AND D. M. ATKIN, *All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding*, Opt. Lett., 21 (1996), pp. 1547–1549.
- [53] B. KUHLMAY, G. RENVERSEZ, AND D. MAYSTRE, *Chromatic dispersion and losses of microstructured optical fibers*, Appl. Opt., 42 (2003), pp. 634–639.
- [54] B. KUHLMAY, T. P. WHITE, G. RENVERSEZ, D. MAYSTRE, L. C. BOTTEN, C. M. DE STERKE, AND R. C. MCPHEDRAN, *Multipole method for microstructured optical fibers. ii. implementation and results*, J. Opt. Soc. Am. B, 19 (2002), pp. 2331–2340.
- [55] M. LENZNER, J. KRÜGER, S. SARTANIA, Z. CHENG, C. SPIELMANN, G. MOUROU, W. KAUTEK, AND F. KRAUSZ, *Femtosecond optical breakdown in dielectrics*, Phys. Rev. Lett., 80 (1998), pp. 4076–4079.
- [56] L. LI, *Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings*, J. Opt. Soc. Am. A, 13 (1996), pp. 1024–1035.
- [57] ———, *Use of fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures*, J. Opt. Soc. Am. A, 13 (1996), pp. 1870–1876.
- [58] N. LITCHINITSER, S. DUNN, P. STEINVURZEL, B. EGGLETON, T. WHITE, R. MCPHEDRAN, AND C. DE STERKE, *Application of an arrow model for designing tunable photonic devices*, Opt. Express, 12 (2004), pp. 1540–1550.
- [59] Z. H. MUSSLIMANI AND J. YANG, *Self-trapping of light in a two-dimensional photonic lattice*, J. Opt. Soc. Am. B, 21 (2004), pp. 973–981.
- [60] G. RENVERSEZ, F. BORDAS, AND B. T. KUHLMAY, *Second mode transition in microstructured optical fibers : determination of the critical geometrical parameter and study of the matrix refractive index and effects of cladding size*, Opt. Lett., 30 (2005), pp. 1264–1266.
- [61] G. RENVERSEZ, P. BOYER, AND A. SAGRINI, *Antiresonant reflecting optical waveguide microstructured fibers revisited : a new analysis based on leaky mode coupling*, Opt. Express, 14 (2006), pp. 5682–5687.
- [62] A. W. SNYDER, S. J. HEWLETT, AND D. J. MITCHELL, *Dynamic spatial solitons*, Phys. Rev. Lett., 72 (1994), pp. 1012–1015.

- [63] A. W. SNYDER, D. J. MITCHELL, AND Y. CHEN, *Spatial solitons of maxwell's equations*, Opt. Lett., 19 (1994), pp. 524–526.
- [64] P. SPITERI, *Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis*, Techniques de l'Ingénieur, 503 (2002).
- [65] R. H. STOLEN AND C. LIN, *Self-phase-modulation in silica optical fibers*, Phys. Rev. A, 17 (1978), pp. 1448–1453.
- [66] F. TEIXEIRA AND W. CHEW, *Pml-fdtd in cylindrical and spherical grids*, IEEE Microw. Guided Wave Lett., 7 (1997), pp. 285–287.
- [67] J. TOULOUSE, *Optical nonlinearities in fibers : Review, recent examples, and systems applications*, IEEE Journal of lightwave technology, 23 (2005), pp. 3625–3641.
- [68] J. P. WEBB, *Edge elements and what they can do for you*, IEEE Trans. Magn., 29 (1993), pp. 1460–1465.
- [69] E. YABLONOVITCH, T. J. GMITTER, R. D. MEADE, A. M. RAPPE, K. D. BROMMER, AND J. D. JOANNOPOULOS, *Donor and acceptor modes in photonic band structure*, Phys. Rev. Lett., 67 (1991), pp. 3380–3383.
- [70] J. YANG AND Z. H. MUSSLIMANI, *Fundamental and vortex solitons in a two-dimensional optical lattice*, Opt. Lett., 28 (2003), pp. 2094–2096.

We want to find spatial solitons in optical fibres with a nonlinear optical Kerr effect. That's why we propose a new numerical approach using the Finite Element Method, very efficient for a natural treatment of inhomogeneous media in complex structures.

A nonlinear scalar model of the electric field in the fibre is used to implement and to validate our method and to understand the physical meaning of the new solutions in a simple case. Several examples dealing with step-index fibres and solid core micro-structured optical fibres (MOFs) with a finite size cross section are described. In each geometry, a complete study is achieved to obtain and to prove with numeric tests the existence of a single self-coherent nonlinear solution (spatial soliton) with the highest reachable energy avoiding the self-focusing instability. The spatial soliton depends on the finite transverse profile of the structure, corresponds to the Townes soliton in the nonlinear homogeneous medium but it is different in optical fibres. Our new approach of the numerical study of the optical Kerr effect in optical fibres permits us to generalize the Townes soliton.

However, the refractive index profile induced by the optical Kerr effect shows that the weak guidance approximation is not respected and thus, the characteristics of the nonlinear solution are misvalued in the scalar model. Therefore, the implementation of the full-vector case deduced directly from the Maxwell equations without approximation is realized. The same study as for the scalar case is performed to take into account all electric field components. For the first time, we underline the numerical existence of a vector Townes soliton.

Finally, to extend the field of investigation of our numerical method, the nonlinear solutions in MOFs with a central hollow defect are studied. By analogy with Solid State Physics, donor/acceptor configurations are defined and nonlinear solutions are analysed according to the size of the defect.